

CEVAPLAR

ALIŞTIRMALAR 11

1. a. $9 = 3^2$; $\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.
b. $72 = 2^3 \cdot 3^2$; $\mathbb{Z}_{2^3 \cdot 3^2}, \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{3^2}, \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3^2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.
c. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$; $\mathbb{Z}_{2^3 \cdot 3 \cdot 5}, \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$,
d. $216 = 2^3 \cdot 3^3$; $\mathbb{Z}_{2^3 \cdot 3^3}, \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_{3^2} \oplus \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{3^3}, \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{3^2} \oplus \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{3^3}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3^2 \oplus \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.
3. $m = p_1 p_2 \cdot p_r$ farklı asal sayıların çarpımı.
5. G bir sonlu Abel grubu, $6 \mid |G|$ ise, G nin, mertebesi 2 ve 3 olan (devirli) altgrupları vardır. Bunların iç dolaysız çarpımı, mertebesi 6 olan bir devirli altgruptur.
7. $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ nin mertebesi 4 olan bir devirli altgrubu yoktur. G bir Abel grubu ve $|G| = 16$ ise, G nin izomorfizm sınıfını bilmek için $G \setminus \{e\}$ nin en az 12 elemanının mertebesini bilmek yeter.
9. a. $s_{25} = 2$ b. $s_6 = 1$ c. $s_{30} = 1$ d. $s_{12} = 2$.
11. G nin mertebesi 2 olmayan elemanları, birim eleman e ile tersi kendisine eşit olmayan elemanlardır: $e, x_1, x_1^{-1}, \dots, x_m, x_m^{-1}$. Bunların sayısı tek olduğuna göre, mertebesi 2 olan elemanlarının sayısı da tektir.
13. G nin, mertebesi 2 olan öyle bir a elemanı ve mertebesi 2^{r-2} olan öyle bir K altgrubu vardır ki, $G = K \times \langle a \rangle$ olur. Dolayısıyla, G nin tüm elemanlarının çarpımı $\prod_{x \in G} x = \left(\prod_{k \in K} k \right) \left(\prod_{k \in G} ka \right) = \left(\prod_{k \in K} k \right)^2 a^{|K|} = e$ dir.

15. $H = \{1, 7, 49, 55\} \times \{1, 17\} \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2.$