

ALİŞTIRMALAR 11

1. Aşağıdaki m değerlerinden her biri için mertebesi m olan tüm Abel gruplarını, izomorfizm farkıyla, belirleyiniz.

- a. $m = 9$ b. $m = 72$ c. $m = 120$ d. $m = 216$

2. Aşağıdaki durumlardan her biri için G Abel grubunun ait olduğu izomorfizm sınıf(lar)ını ve G nin değişmez çarpanlarını belirleyiniz.

- a. $|G| = 216$, G nin, mertebesi 3 olan tam 1 tane altgrubu vardır.
b. $|G| = 216$, G nin, mertebesi 3 olan tam 4 tane altgrubu vardır.
c. $|G| = 120$, G nin, mertebesi 2 olan tam 3 elemanı vardır.

3. Mertebesi m olan her Abel grubu devirli ise, m hakkında ne söyle-ne-bi-lir? Bu tür m leri belirleyiniz.

4. Aşağıdaki durumlardan her biri için G Abel grubunun ait olduğu izomorfizm sınıf(lar)ını ve G nin değişmez çarpanlarını belirleyiniz.

a. $|G| = 16$, G nin, mertebesi 2 olan en az 2 elemanı ve mertebesi 8 olan en az bir elemanı vardır.

b. $|G| = 16$ dır ve G içinde, $a^2 \neq b^2$, $|a| = |b| = 4$ olan a, b elemanları vardır.

c. $|G| = 72$, G nin, mertebesi 2 olan tam 3 tane altgrubu vardır.

d. $|G| = 72$, G nin, mertebesi 2 olan tam bir elemanı ve mertebesi 3 olan tam iki elemanı vardır.

5. G bir sonlu Abel grubu, $6 \mid |G|$ ise, G nin, mertebesi 6 olan bir devirli altgrubu bulunduğunu gösteriniz.

6. G Abel ve $|G| = 25$ ise, G nin izomorfizm sınıfını bilmek için $G \setminus \{e\}$ nin en az kaç elemanının mertebesini bilmek yeter? $|G| = 50$ için aynı soru.

7. G bir sonlu Abel grubu, $4 \mid |G|$ ise, G nin, mertebesi 4 olan bir devirli altgrubunun bulunmayabileceğini bir örnekle gösteriniz. G bir Abel grubu ve $|G| = 16$ ise, G nin izomorfizm sınıfını bilmek için $G \setminus \{e\}$ nin en az kaç elemanının mertebesini bilmek yeter?

8. Mertebesi m olan ve herhangi ikisi izomorf olmayan Abel gruplarının sayısı s_m ile gösterildiğine göre aşağıdaki koşulları sağlayan en küçük m doğal sayısını bulunuz.

- a. $s_m = 2$ b. $s_m = 3$ c. $s_m = 4$ d. $s_m = 5$

9. Her bir m için mertebesi m olan, herhangi ikisi izomorf olmayan kaç Abel grubu bulunur?

- a. $m = 25$ b. $m = 6$ c. $m = 30$ d. $m = 12$

10. p , q ve r farklı asal sayıları göstermek üzere, her bir m için mertebesi m olan, herhangi ikisi izomorf olmayan kaç Abel grubu bulunur?

- a. $m = p^2$ b. $m = pq$ c. $m = pqr$ d. $m = p^2q$

11. G bir Abel grubu, $|G| = 2^r$, $r \geq 1$ ise, G nin mertebesi 2 olan elemanlarının sayısı tektir (çift değil), gösteriniz.

12. G bir sonlu Abel grubu ve $a = \prod_{x \in G} x$ ise, $a^2 = e$ olduğunu gösteriniz.

13. $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$ ve $|G| > 2$ ise, G nin tüm elemanlarının çarpımı, $\prod_{x \in G} x = e$, G nin birim elemanıdır, gösteriniz.

14. G bir Abel grubu, $|G| = 2^n \cdot m$, m tek olsun.

a. G nin, mertebesi 2^n olan altgrubu devirli değilse, G nin tüm elemanlarının çarpımı, $\prod_{x \in G} x = e$, G nin birim elemanıdır, gösteriniz.

b. G nin, mertebesi 2^n olan altgrubu devirli ise, durum ne olur?

15. $H = \{1, 7, 17, 23, 49, 55, 65, 71\} \leq \mathbb{Z}_{96}^*$ olduğunu gösterip H nin ait

olduğu izomorfizm sınıfını ve H nin değişmez çarpanlarını bulunuz.