BÖLÜM 11

SONLU ABEL GRUPLARININ TEMEL TEOREMİ

Bu bölümü bitirdiğinizde,

- Sonlu Abel Gruplarının Temel Teoremi
- Temel Teorem'in iki farklı ifadesi
- basit çarpanlar ve değişmez çarpanlar

hakkında bilgi sahibi olabileceksiniz.

BÖLÜM 11

SONLU ABEL GRUPLARININ TEMEL TEOREMİ

Bu bölümde, bir cebircinin gözüyle, yani izomorfizm farkıyla, tüm sonlu Abel gruplarının yapısını açıklayan bir teorem sunacağız. İlk kez 1858'de Leopoldt Kronecker tarafından ispatlanmış olan bu teoremin, önce ifadesini ve bazı uygulamalarını vereceğiz; daha sonra, bir dizi lemma ve ardından da teoremin kanıtını sunacağız.

Temel Teorem. *Her sonlu Abel grubu, her birinin mertebesi bir asal sayının kuvveti olan sonlu sayıda devirli altgrubunun iç dolaysız çarpımıdır. Ayrıca, bu dolaysız çarpımdaki devirli gruplar, sıralanışları dışında ve izomorfizm farkıyla, tek türlü belirlidir.*

Önerme 10.1 ile Teorem 10.4 ve ayrıca mertebesi n olan her devirli grubun $\mathbb{Z}_n$ ye izomorf olduğu göz önüne alınırsa, Temel Teorem, her sonlu Abel grubu G için

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$$

olacak şekilde (farklı olmaları gerekmeyen) asal sayılar, $p_1, \ldots, p_k$ ve pozitif tamsayılar, $n_1, \ldots, n_k$ bulunduğunu gösterir. Buradaki $p_1^{n_1}, \ldots, p_k^{n_k}$ sayıları G tarafından tek türlü belirlenir. Bir sonlu Abel grubunu bu şekilde ifade etmek, onun izomorfizm sınıfını tamamen belirler.

Temel Teorem o kadar güçlüdür ki bu teoremi kullanarak istenilen her mertebeden tüm Abel gruplarını, izomorfizm farkıyla, inşa etmek mümkündür. Örneğin, p bir asal sayı olmak üzere, mertebesi p olan her Abel grubu $\mathbb{Z}_p$ ye; mertebesi p^2 olan her Abel grubu,

$$\mathbb{Z}_{p^2} \quad \text{veya} \quad \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$$

den birine; mertebesi p^3 olan her Abel grubu,

$$\mathbb{Z}_{p^3},\ \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p\ ,\ \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$$

den birine; mertebesi p^4 olan her Abel grubu,

$$\mathbb{Z}_{p^4},\quad \mathbb{Z}_{p^3} \oplus \mathbb{Z}_p,\quad \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p,\ \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_{p^2},\quad \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$$

den birine izomorftur.

Genel olarak, t bir pozitif tamsayı ise, elemanlarının toplamı t olan her pozitif tamsayı kümesine karşılık, mertebesi p^t olan bir Abel grubu vardır.

Tanım 1. $t, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ ve $n_1 + \cdots + n_k = t$ ise, $\{n_1, \ldots, n_k\}$ kümesine t nin bir *parçalanışı* denir. □

Örneğin, 3 ün parçalanışları, $\{3\}$, $\{2, 1\}$ ve $\{1, 1, 1\}$ kümelerinden ibarettir.

Eğer $\{n_1, \ldots, n_k\}$, t nin bir parçalanışı, yani $t = n_1 + \cdots + n_k$ ise, $\mathbb{Z}_{p^{n_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{n_k}}$, mertebesi p^t olan bir Abel grubudur. Temel Teorem'deki *tek türlülük*, t nin her farklı parçalanışı için farklı izomorfizm sınıfları bulunduğunu gösterir.

Temel Teorem'in gücünü ve önemini tam olarak kavrayabilmek için, örneğin, mertebesi 16 olan Abel gruplarının izomorfizm sınıflarının Temel Teorem yardımıyla kolayca belirlenebilmesine karşın, mertebesi 16 olan Abel olmayan grupların izomorfizm sınıflarının belirlenmesinin pek kolay olmadığını gözlemlemek yeter.

Mertebesi bir asal sayının kuvveti olan Abel gruplarını belirleyebildiğimiz için, mertebesi herhangi bir n sayısı olan Abel gruplarının izomorfizm sınıflarını belirlememiz de zor olmayacaktır. Bunun için, önce n yi asal çarpanlarına ayırırız: $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, $\quad i \neq j$ için $p_i \neq p_j$. Her $i = 1, \ldots, k$ için mertebesi p_i^{ni} olan tüm Abel gruplarını yazıp bunları yan yana getirerek mertebesi n olan tüm Abel gruplarını, izomorfizm farkıyla, elde ederiz.

Örnek olarak, mertebesi 3000 olan her Abel grubu, aşağıdaki gruplardan birine izomorftur ($3000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$ olduğuna dikkat ediniz):

$$\mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{5^3}, \qquad \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{5^3},$$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{5^3}, \qquad \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{5^2} \oplus \mathbb{Z}_5,$$

$$\mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5, \qquad \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{5^2} \oplus \mathbb{Z}_5,$$

$$\mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5, \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{5^2} \oplus \mathbb{Z}_5,$$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5.$$

Mertebesi 3000 olan bir Abel grubu G verildiğinde, G nin yukarıdaki dolaysız çarpımlardan hangisine izomorf olduğunu anlamak için G nin elemanlarının mertebelerine bakılabilir. Örneğin, G nin metebesi 125 olan bir elemanı varsa, G, ilk üç dolaysız çarpımdan birine izomorftur. G nin hem mertebesi 125 hem de mertebesi 8 olan elemanları varsa,

$$G \cong \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{5^3}$$

olmalıdır.

Şimdi, Temel Teorem'in kanıtında kullanacağımız ilk lemmayı veriyoruz:

Lemma 1. *G bir Abel grubu, $|G| = mn$, $obeb(m,n) = 1$ olsun ve $H = \{x \in G : x^m = e\}$, $K = \{y \in G : y^n = e\}$ tanımlayalım. Bu takdirde, $G = H \times K$ dır.*

Kanıt. $H \leq G$ ve $K \leq G$ olduğu açıktır. $obeb(m,n) = 1$ olduğundan, $1 = ms + nt$ olacak biçimde $s, t \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan, $x \in G$ için

$$x = x^1 = x^{ms+nt} = x^{ms} \cdot x^{nt}$$

olduğunu görürüz. Ayrıca, $|G| = mn$, $x^{mn} = e$ olduğundan,

$$(x^{ms})^n = (x^{nt})^m = e;$$

yani $x^{ms} \in K$, $x^{nt} \in H$ dir. Böylece, $G = HK$ olduğunu görürüz. G, bir Abel grubu olduğundan, her $h \in H$ ve $k \in K$ için $hk = kh$ dir. Son olarak,

$$x \in H \cap K \Longrightarrow x^m = x^n = e \Longrightarrow x^{ms} = x^{nt} = e$$
$$\Longrightarrow x^{ms} \cdot x^{nt} = e \Longrightarrow x = x^{ms+nt} = e$$

olduğundan, $H \cap K = \{e\}$ dir. Böylece, $G = H \times K$ dır. ∎

Sonuç 1. *G bir Abel grubu, $|G| = m_1 \cdots m_r$, her $i \neq j$ için m_i ve m_j aralarında asal olsun. Her $i = 1, \ldots, r$ için $H_i = \{x \in G : \quad x^{m_i} = e\}$ tanımlansın. Bu takdirde, $G = H_1 \times \cdots \times H_r$ dir.*

Kanıt. Alıştırma. ∎

Lemma 2. *G bir sonlu Abel grubu, p bir asal sayı ve $p \mid |G|$ ise, G nin, mertebesi p olan bir elemanı vardır.*

Kanıt. p asal ve $p \mid |G|$ olsun. İddiayı, $|G|$ üzerinde tümevarımla kanıtlayacağız. $p \mid |G|$ olduğundan, $|G| \geq p$ dir. $|G| = p$ ise, G devirlidir ve G nin her üretecinin mertebesi p dir. Şimdi, $|G| = n > p$, $p \mid n$ olsun ve iddianın, mertebesi n den küçük ve p ile bölünen her Abel grubu için doğru olduğunu kabul edelim; $x \in G \backslash \{e\}$ alalım. $|x| = m$ olsun. Eğer $p \mid m$, $m = pt$ ise, $x^t \in G$ nin mertebesi p dir. Eğer $p \not| m$ ise, $\overline{G} = G/ < x >$ bölüm grubunun mertebesi n den küçüktür ve p ile bölünür. Tümevarım hipotezine göre, $\overline{G}$ nin, mertebesi p olan bir $\overline{b} = b < x >$ elemanı vardır. Eğer b nin mertebesi r ise, $\overline{b}^r = (b < x >)^r = b^r < x >= e < x >=< x >$ ve dolayısıyla, $\overline{b}$ nin mertebesi p olduğundan, $p \mid r$ olur. $r = ph$, $h \geq 1$ olsun. Bu durumda, $a = b^h$ nin mertebesi p olur ve bu, kanıtı tamamlar. ∎

Sonuç 1. *G, bir sonlu Abel grubu, p, bir asal sayı olsun. Eğer G nin her elemanının mertebesi p nin bir kuvveti ise, G nin mertebesi de p nin bir kuvvetidir.*

Kanıt. $|G| > 1$ alabiliriz. Eğer q bir asal sayı ve $q \mid |G|$ ise, Lema 2 ye göre, G nin, mertebesi q olan bir elemanı vardır. O halde, $q = p$

dir. ■

Şimdi, G bir sonlu Abel grubu; $p_1, \ldots, p_k$ farklı asal sayılar olmak üzere $|G| = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ olsun ve her $i = 1, \ldots, k$ için

$$G(p_i) = \{x \in G : \ x^{{p_i}^{n_i}} = e\}$$

tanımlayalım. Lemma 1 in sonucundan,

$$G = G(p_1) \times G(p_2) \times \cdots \times G(p_k) \qquad (1)$$

olduğu kolayca görülür. Lemma 2 nin sonucuna göre, her $i = 1, \ldots, k$ için $G(p_i)$ nin mertebesi, p_i nin bir kuvvetidir. Varsayımlarımız, her $i = 1, \ldots, k$ için $|G(p_i)| = {p_i}^{n_i}$ olmasını gerektirir.

Gözlem 10.3 ışığında (1) denklemi dikkate alınınca, Temel Teorem'i, mertebesi bir asal sayının kuvveti olan Abel grupları için kanıtlamak yeterli olacaktır. Çünkü, her bir $G(p_i)$ nin, devirli altgruplarının iç dolaysız çarpımı olarak yazılabildiği gösterilirse, G nin de Temel Teorem'in ifadesinde olduğu gibi, her birinin mertebesi bir asal sayının kuvveti olan devirli altgruplarının iç dolaysız çarpımı olarak yazılabildiği gösterilmiş olur. Bu doğrultuda ilerlerken aşağıdaki lemma yararlı olacaktır.

Lemma 3. *p bir asal sayı, n bir pozitif tamsayı ve G, mertebesi p^n olan bir Abel grubu olsun. Eğer G içinde mertebesi en büyük olan elemanlardan biri a ise, öyle bir $K \leq G$ vardır ki $G = < a > \times K$ dır.*

Kanıt (n üzerinde tümevarım)**.** $n = 1$ ise, $G =< a > \times < e >$ dir. İddianın, $k < n$ olmak üzere, mertebesi p^k olan her grup için doğru olduğunu kabul edelim; $|G| = p^n$ olsun. G içinde mertebesi en büyük olan elemanlardan biri a olsun. $|a| = p^n$ ise, $G =< a >$ dır ve kanıt biter. O halde, $|a| = p^m$, $m < n$ kabul edebiliriz. Bu takdirde, her $x \in G$ için $x^{p^m} = e$ olur. Şimdi, $G \backslash < a >$ içinde mertebesi p olan bir b elemanı alalım (b nin nasıl bulunacağını düşününüz). Bu seçimden dolayı, $< a > \cap < b >= \{e\}$ olacağı açıktır. Şimdi, $\overline{G} = G / < b >$ yi düşünelim. $|\overline{G}| = p^{n-1}$ dir. Her $u \in G$ için $u < b >= \overline{u}$ nin mertebesi de p nin bir kuvvetidir. Ayrıca, $< a > \cap < b >= \{e\}$ olduğundan,

$|\overline{a}| = p^m$ dir. O halde, $\overline{G}$ içinde mertebesi en büyük olan elemanlardan biri $\overline{a}$ dir. Tümevarım hipotezinden, $\overline{G} =< \overline{a} > \times \overline{K}$ olacak biçimde bir $\overline{K} \leq \overline{G}$ vardır. Eğer

$$K = \{u \in G : \ \overline{u} \in \overline{K}\ \}$$

tanımlarsak, $< b > \leq K \ \leq G$ olur ve

$$\begin{aligned} u \in < a > \cap K &\Longrightarrow \overline{u} \in < \overline{a} > \cap \overline{K} = \{< b >\} \\ &\Longrightarrow u \in < b > \cap < a > \Longrightarrow u = e \end{aligned}$$

olduğundan, $< a > \ \cap K = \{e\}$ dir. Diğer yandan, $\overline{K} = K/ < b >$, $\overline{G} =< \overline{a} > \times \overline{K} \cong < \overline{a} > \oplus \overline{K}$, $|\overline{G}| = |G|/p$ olduğundan,

$$|G|/p = |\overline{G}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{K}| = |a| \cdot |K|/p \quad , \quad |G| = |a| \cdot |K| = | < a > K|$$

dır. Böylece, $< a > K = G$ ve sonuç olarak, $G =< a > \times K$ olduğu görülür. Bu, Lemma 3 ün kanıtını tamamlar. ∎

Lemma 4. *G, mertebesi bir asal sayının kuvveti olan bir sonlu Abel grubu ise, G, sonlu sayıda devirli altgrubunun iç dolaysız çarpımıdır.*

Kanıt. Lemma 3 ve $|G|$ üzerinde tümevarım. ∎

Böylece, bu dört lemma ile, her sonlu Abel grubunun, her birinin mertebesi bir asal sayının kuvveti olan sonlu sayıda devirli altgrubun iç dolaysız çarpımı olduğunu, yani Temel Teorem'in ilk kısmını, kanıtlamış bulunuyoruz. Temel Teorem'in ikinci kısmı olan tek türlülüğün kanıtı, aşağıdaki lemmadan elde edilir:

Lemma 5. *p bir asal sayı, n bir pozitif tamsayı ve G, mertebesi p^n olan bir Abel grubu olsun. $H_1, \ldots, H_r$; $K_1, \ldots, K_s$, G nin devirli altgrupları ve $|H_1| \geq |H_2| \geq \cdots \geq |H_r| \geq p$; $|K_1| \geq |K_2| \geq \cdots \geq |K_s| \geq p$ olmak üzere $G = H_1 \times \ldots \times H_r$, $G = K_1 \times \cdots \times K_s$ ise, $r = s$ dir ve her $i = 1, \ldots, r$ için $|K_i| = |H_i|$ dir.*

Kanıt (n üzerinde tümevarım)**.** $n = 1$ ise, $G = H_1 = K_1$ olması gerekir. Şimdi, Lemma 5 in, $1 \leq k < n$ olan her k için doğru olduğunu kabul edelim ve $|G| = p^n$ olsun. Bu takdirde, G nin, mertebesi p olan elemanı vardır ve $G^p < G$ dir(Bak. Alıştırma 10.3). Eğer $|H_1| = \cdots = |H_r| = p$ ise, o takdirde, her $x \in G$ için $x^p = e$ olur ve bu nedenle $|K_1| = \cdots = |K_s| = p$ olmak zorundadır. Dolayısıyla, bu durumda, $p^n = |G| = p^r = p^s$; buradan da $r = n = s$ olur. Eğer $|K_1| = \cdots = |K_s| = p$ ise, benzer şekilde, $r = s$ ve $|H_1| = \cdots = |H_r| = p$ olduğu görülür. O halde, en az bir i için $|H_i| > p$ ve en az bir j için $|K_j| > p$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu kabulle, $|H_i| > p$ olan en büyük i indisi r', $|K_j| > p$ olan en büyük j indisi s' olsun. O zaman

$$G^p = H_1^p \times \cdots \times H_{r'}^p = K_1^p \times \cdots \times K_{s'}^p$$

dir. Burada, her $i > r'$ ve her $j > s'$ için $|H_i| = |K_j| = p$ ve dolayısıyla, $H_i^p = K_j^p = \{e\}$ olacağına dikkat ediniz. $|G^p| = p^k$, $k < n$, olduğundan, tümevarım hipotezine göre $r' = s'$ ve her $i = 1, \ldots, r'$ için $|H_i^p| = |K_i^p|$ olmalıdır. Ayrıca, H_i ve K_i devirli olduğundan, her $i = 1, \ldots, r'$ için $|H_i| = p|H_i{}^p|$ ve $|K_i| = p|K_i{}^p|$ dir. O halde her $i = 1, \ldots, r'$ için $|H_i| = |K_i|$ dir. Son olarak,

$$G = H_1 \times \cdots \times H_{r'} \times H_{r'+1} \times \cdots \times H_r = K_1 \times \cdots \times K_{r'} \times K_{r'+1} \times \cdots \times K_s$$

ifadelerinden mertebeler hesaplanırsa,

$$|G| = |H_1| \cdots |H_{r'}| \cdot p^{r-r'} = |K_1| \cdots |K_{r'}| \cdot p^{s-r'}$$

ifadesi ve buradan, $r - r' = s - r'$ elde edilir. Böylece, $r = s$ olduğu ve her $i = 1, \cdots, r$ için $|H_i| = |K_i|$ olduğu görülür. ∎

Yukarıdaki lemmanın sonucu olarak, Temel Teorem'deki *tek türlülük*, mertebesi bir asal sayının kuvveti olan Abel grupları için ve dolayısıyla, her sonlu Abel grubu için kanıtlanmış olur.

Temel Teorem'den hemen elde edilebilecek sonuçlardan biri şudur:

Sonuç 1. *G bir sonlu Abel grubu, $m \mid |G|$ ise, G nin en az bir altgrubunun mertebesi m dir.*

Kanıt. $p_1, \ldots, p_k$ asal sayılar ve $r_1, \ldots, r_k$ pozitif tamsayılar olmak üzere

$$G = \mathbb{Z}_{p_1{}^{r_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k{}^{r_k}} \quad , \quad |G| = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$$

kabul edebiliriz. $m \mid |G|$ olduğundan, uygun $0 \leq s_i \leq r_i$, $1 \leq i \leq k$, için $m = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k}$ yazabiliriz. Her $i = 1, \ldots, k$ için öyle bir $a_i \in \mathbb{Z}_{{p_i}^{r_i}}$ seçelim ki, $|a_i| = p_i^{s_i}$ olsun ve $H =< a_1 > \oplus \cdots \oplus < a_k >$ alalım. O zaman $|H| = m$ olur. ∎

Sonlu Abel gruplarının Temel Teoremi, bazen, yukarıda ifade edildiğinden biraz daha farklı olarak ifade edilir. Bu farklı ifadeye ulaşmanın bir yolunu aşağıda özetliyoruz. G bir sonlu Abel grubu ise, G nin Temel Teorem'deki ifadesini aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz: $p_1 > \cdots > p_k$ farklı asal sayılar; her $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, r$ için $t_{ij} \geq 0$ ve ayrıca $j < \nu$ için $t_{ij} \geq t_{i\nu}$ olmak üzere

$$\begin{array}{lllllll} G \cong \mathbb{Z}_{{p_1}^{t_{11}}} & \oplus \mathbb{Z}_{{p_1}^{t_{12}}} & \oplus \mathbb{Z}_{{p_1}^{t_{13}}} & \oplus \cdots & \oplus \mathbb{Z}_{{p_1}^{t_{1r}}} & \oplus \\ \quad\; \mathbb{Z}_{{p_2}^{t_{21}}} & \oplus \mathbb{Z}_{{p_2}^{t_{22}}} & \oplus \mathbb{Z}_{{p_2}^{t_{23}}} & \oplus \cdots & \oplus \mathbb{Z}_{{p_2}^{t_{2r}}} & \oplus \\ & & \quad\cdots\cdots & & & \\ \quad\; \mathbb{Z}_{{p_k}^{t_{k1}}} & \oplus \mathbb{Z}_{{p_k}^{t_{k2}}} & \oplus \mathbb{Z}_{{p_k}^{t_{k3}}} & \oplus \cdots & \oplus \mathbb{Z}_{{p_k}^{t_{kr}}} & \end{array}$$

yazalım. Bu takdirde, her $j = 1, \ldots, r$ için

$$m_j = {p_1}^{t_{1j}} {p_2}^{t_{2j}} \ldots {p_k}^{t_{kj}}$$

tanımlarsak, her $j = 2, \ldots, r$ için $m_j \mid m_{j-1}$ ve

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_r}$$

olur. Böylece elde edilen $m_1, \ldots, m_r$ tamsayıları tek türlü belirlidir. Gerçekten, eğer her $j = 2, \ldots, s$ için $\mu_j \mid \mu_{j-1}$ ve $G \cong \mathbb{Z}_{\mu_1} \oplus \mathbb{Z}_{\mu_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\mu_s}$ olan $1 < \mu_s \leq \mu_{s-1} \leq \cdots \leq \mu_1$ sayıları varsa, $r = s$ ve her $j = 1, \ldots, r$ için $\mu_j = m_j$ dir. Bunu görmek için, yukarıda yapılanlar tersine işletilerek, her bir μ_j nin asal çarpanlarına ayrılışı düşünülürse, $u_{ij} \geq 0$ olmak üzere $\mu_j = p_1^{u_{1j}} \cdots p_k^{u_{kj}}$ olduğu ve

$$G(p_i) \cong \mathbb{Z}_{p_i^{t_{i1}}} \oplus \mathbb{Z}_{p_i^{t_{i2}}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_i^{t_{ir}}} \cong \mathbb{Z}_{p_i^{u_{i1}}} \oplus \mathbb{Z}_{p_i^{u_{i2}}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_i^{u_{is}}}$$

olduğu görülür. Temel Teorem'in birinci ifadesinden $r = s$ olduğu, her $j = 1, \ldots, r$ için $p_i^{t_{ij}} = p_i^{u_{ij}}$ ve dolayısıyla, $\mu_j = m_j$ olduğu görülür.

Temel Teorem'in İkinci İfadesi. *Eğer G bir sonlu Abel grubu ise, öyle tek türlü belirli $m_1, \ldots, m_r$ tamsayıları bulunabilir ki her*

$j = 2, \ldots, r$ için $m_j \mid m_{j-1}$ ve

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_r} \tag{2}$$

dir. ■

Örnek 1. $G = \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$ grubunun (2) deki biçimde yazılışı şöyle elde edilir: Gösterimler yukarıdaki gibi olmak üzere $p_1 = 5$, $p_2 = 3$, $p_3 = 2$ alınırsa, $t_{11} = 1$, $t_{12} = 1$, $t_{13} = 1$; $t_{21} = 1$, $t_{22} = 0$, $t_{23} = 0$; $t_{31} = 2$, $t_{32} = 1$, $t_{33} = 0$ ve

$$m_1 = 5 \cdot 3 \cdot 2^2 = 60, \ m_2 = 5 \cdot 2 = 10, \ m_3 = 5$$

elde edilir. Böylece,

$$G \cong \mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_5$$

olduğu görülür. □

Tanım 2. Temel Teorem'in ilk ifadesinde ortaya çıkan $p_1^{n_1}, \ldots, p_k^{n_k}$ sayılarına G nin *basit çarpanları* , ikinci ifadede ortaya çıkan $m_1, \ldots, m_r$ sayılarına da G nin *değişmez çarpanları* denir. □

Temel Teorem'in ispatındaki yöntemle, mertebesi p^n (p asal) olan bir G Abel grubunun devirli grupların dolaysız çarpımı olarak yazılışı şöyle programlanabilir: Önce, G nin mertebesi en büyük olan elemanlarından biri, diyelim ki a_1 alınır,

$$G =< a_1 > \times K_1, \quad G_1 =< a_1 >$$

bulunur. Sonra, varsa, G içinde mertebesi $p^k \leq |G|/|G_1|$ olan ve her $j = 0, 1, \cdots, k-1$ için $a_2^{p^j} \notin G_1$ koşulunu sağlayan elemanları arasında mertebesi maksimum olan biri seçilir,

$$G =< a_1 > \times < a_2 > \times K_2, \quad G_2 = G_1 \times < a_2 >$$

bulunur. Sonra, varsa, G içinde mertebesi $p^t \leq |G|/|G_2|$ olan ve her $j = 0, 1, \ldots, t-1$ için $a_3^{p^j} \notin G_2$ koşulunu sağlayan elemanları arasında mertebesi maksimum olan biri seçilir,

$$G \ = < a_1 > \times < a_2 > \times < a_3 > \times K_3, \quad G_3 = G_2 \times < a_3 >$$

bulunur ve bu işlem sürdürülür. Bu sürecin sonlu olacağı açıktır.

Örnek 2. $\mathbb{Z}_{91}^*$ in $G = \{1, 9, 16, 22, 29, 53, 74, 79, 81\}$ altgrubunu ele alalım. Bu grubun elemanlarının mertebeleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir:

Eleman	1	9	16	22	29	53	74	79	81
Mertebe	1	3	3	3	3	3	3	3	3

$a_1 = 9$ seçelim. O zaman, $G_1 = < 9 > = \{1, 9, 81\}$ olur. $a_2 = 16$ seçersek, $G_2 = < 9 > \times < 16 > = G$, ve böylece, $G \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ olduğu görülür. $\square$