CEVAPLAR

ALIŞTIRMALAR 10

1. Birleşme özelliğine sahip ikili işlem var, her bir G_i nin birim elemanı e_i olmak üzere $G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$ nin birim elemanı $e = (e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n)$, $(g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n)^{-1} = (g_1^{-1},\ g_2^{-1},\ \ldots,\ g_n^{-1})$. Her bir G_i bir Abel grubu ise, $(g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n)(h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n) = (g_1h_1,\ g_2h_2,\ \ldots,\ g_nh_n) = (h_1g_1,\ h_2g_2,\ \ldots,\ h_ng_n) = (g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n)(h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n)$.

3. a. $e = e^n \in G^n$; $x^n, y^n \in G^n \Rightarrow x^n(y^n)^{-1} = x^n(y^{-1})^n = (xy^{-1})^n \in G^n$; eğer G sonlu ise ve G nin mertebesi n olan bir elemanı varsa, $f : G \longrightarrow G^n,\ f(x) = x^n$ bire-bir olmayan bir örten fonksiyon olduğundan, $G^n < G$ dir.

b. $|G| = n$ ise, her $x \in G$ için $x^n = e$ dir.

c. $z = (h,k)^n \in (H \oplus K)^n \Longleftrightarrow z = (h^n, k^n) \in H^n \oplus K^n$.

5. Mertebesi 4 olanlar: $(0,1), (0,3), (1,1), (1,3)$; mertebesi 2 olanlar: $(0,2),\ (1,0), (1,2)$.

7. a. $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ içinde mertebesi 2 olan elemanlar $(0,2), (2,0), (2,2)$ dir. Birim de dikkate alınınca mertebesi 4 olan tam 12 eleman vardır.

b. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8$ içinde $|(a,b)| = 4 \Longleftrightarrow |b| = 4$. Dolayısıyla, mertebesi 4 olan tam $2 \cdot \varphi(4) = 4$ eleman vardır.

c. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ içinde $|(a,b,c)| = 4 \Longleftrightarrow |c| = 4$. Dolayısıyla, mertebesi 4 olan tam $2 \cdot 2 \cdot \varphi(4) = 8$ eleman vardır.

d. $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$ içinde $|(a,b)| = 4 \Longleftrightarrow ((a \in \mathbb{Z}_4$ ve $|b| = 4)$ veya $(|a| = 4$ ve $b \in \mathbb{Z}_8, |b| < 4))$. Dolayısıyla, mertebesi 4 olan tam $4 \cdot \varphi(4) + \varphi(4) \cdot 2 = 12$ eleman vardır.

e. $\mathbb{Z}_{40} \oplus \mathbb{Z}_{80}$ içinde $|(a,b)| = 4 \iff ((a \in \mathbb{Z}_{40}, |a| \leq 4$ ve $|b| = 4)$ veya $(|a| = 4$ ve $b \in \mathbb{Z}_{80}, |b| < 4))$. Dolayısıyla, mertebesi 4 olan tam $4 \cdot \varphi(4) + \varphi(4) \cdot 2 = 12$ eleman vardır.

f. $\mathbb{Z}_{4000} \oplus \mathbb{Z}_{8000}$ içinde $|(a,b)| = 4 \iff ((a \in \mathbb{Z}_{4000}, |a| \leq 4$ ve $(|b| = 4)$ veya $(|a| = 4$ ve $b \in \mathbb{Z}_{8000}, |b| < 4))$. Dolayısıyla, mertebesi 4 olan tam $4 \cdot \varphi(4) + \varphi(4) \cdot 2 = 12$ eleman vardır.

9. a. $\mathbb{Z}_{25}$ devirli gruptur; mertebesi 5 olan 1 altgrubu vardır.

b. $\mathbb{Z}_{50}$ devirli gruptur; mertebesi 5 olan 1 altgrubu vardır.

c. $\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$ in mertebesi 5 olan 24 elemanı ve mertebesi 5 olan $\frac{24}{\varphi(5)} = 6$ altgrubu vardır.

d. $G = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{25}$ in mertebesi 5 olan 6 altgrubu vardır.

11. 15.

13. $G = \{2^r 6^s : r, s \in \mathbb{Z}\} = \{2^{r+s} 3^s : r, s \in \mathbb{Z}\} = \{2^a 3^b : a, b \in \mathbb{Z}\}$. $\Psi : G \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\Phi(2^a 3^b) = (a, b)$ bir izomorfizmdir.

15. Önerme 1 in kanıtını tamamlamak için her bir f_j nin bir izomorfizm olduğu kullanılarak f nin iyi tanımlı, bire-bir ve örten bir dönüşüm olduğu görülür. Gözlem 2 yi bir devrinim için kanıtlamak yeter.