

ALIŞTIRMALAR 10

1. G_1, \dots, G_n gruplar ise, $G_1 \oplus \dots \oplus G_n$ nin de gerçekten bir grup olduğunu; ayrıca, eğer her bir G_i bir Abel grubu ise, $G_1 \oplus \dots \oplus G_n$ nin de bir Abel grubu olduğunu gösteriniz.
2. a. $G_1 \oplus G_2 \cong G_2 \oplus G_1$ olduğunu gösteriniz.
b. $(G_1 \oplus G_2) \oplus G_3 \cong G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3) \cong G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$ olduğunu gösteriniz.
3. G bir Abel grubu ve $n \in \mathbb{N}$ ise, $G^n = \{g^n : g \in G\}$ tanımlanır. Aşağıdakileri kanıtlayınız:
 - a. $G^n \leq G$ dir; eğer G sonlu ise ve G nin mertebesi n olan bir elemanı varsa, $G^n < G$ dir.
 - b. $|G| = n$ ise, $G^n = \{e\}$ dir.
 - c. H ve K Abel grupları ise, $(H \oplus K)^n = H^n \oplus K^n$ dir.
4. G bir grup olmak üzere $H = \{(x, x) : x \in G\}$ tanımlayalım. $H \leq G \oplus G$ olduğunu gösteriniz. $G = \mathbb{R}$ için H yi geometrik olarak yorumlayınız.
5. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ ün elemanlarının her birinin mertebesini bulunuz.

6. G nin bir devirli grup olup olmadığını belirleyiniz:

- a. $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ b. $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ c. $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
d. $G = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$ e. $G = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_9$ f. $G = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$

7. G içinde mertebesi 4 olan elemanların sayısını belirleyiniz. (Bu işi yaparken grubun tüm elemanlarının mertebelerini bulmaya çalışmayınız.)

- a. $G = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ b. $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8$ c. $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$
d. $G = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$ e. $G = \mathbb{Z}_{40} \oplus \mathbb{Z}_{80}$ f. $G = \mathbb{Z}_{4000} \oplus \mathbb{Z}_{8000}$

8. Bir önceki alıştırmada verilen grupların her birinin, mertebesi 4 olan kaç devirli altgrubu bulunduğunu belirleyiniz.

9. G nin mertebesi 5 olan altgruplarının sayısını belirleyiniz.

- a. $G = \mathbb{Z}_{25}$ b. $G = \mathbb{Z}_{50}$ c. $G = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$ d. $G = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{25}$

10. $\mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{100}$ ün mertebesi 15 olan devirli altgruplarının sayısını bulunuz.

11. Bir Abel grubunun mertebesi 6 olan 30 elemanı varsa, o grubun mertebesi 6 olan kaç altgrubu vardır?

12. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^+ \times \{-1, 1\}$ olduğunu kanıtlayınız.

13. \mathbb{Q}^* in $G = \{2^r 6^s : r, s \in \mathbb{Z}\}$ çarpımsal alt grubunu düşününüz. $G \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ olduğunu gösteriniz.

14. $G = \{2^a 6^b 10^c : a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ çarpımsal grubu için $G = \langle 2 \rangle \times \langle 6 \rangle \times \langle 10 \rangle$ olduğunu gösteriniz. $H = \{2^a 6^b 18^c : a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ çarpımsal grubu için $H = \langle 2 \rangle \times \langle 6 \rangle \times \langle 18 \rangle$ midir?

15. Önerme 1 in kanıtını tamamlayınız. Gözlem 1, Gözlem 2 ve Gözlem 3 teki iddiaları kanıtlayınız.

16. \mathbb{Z} nin $H = \langle 4 \rangle$, $K = \langle 10 \rangle$ ve $M = \langle 7 \rangle$ altgruplarını alalım.

- a. $H + K$ yı belirleyiniz. $\mathbb{Z} = H \times K$ midir?
- b. $H + M$ yi belirleyiniz. $\mathbb{Z} = H \times M$ midir?
- c. $\mathbb{Z} = K \times M$ midir?