

e. İki Kişiden Oluşan İki Mallı Ekonomide Rekabetçi Denge

$$U_A = X_A Y_A,$$

$$U_B = X_B Y_B \text{ olsun.}$$

U_A , birinci kişinin fayda; U_B , ikinci kişinin fayda fonksiyonudur. Başlangıç donanımları,

$$\bar{X}_A = 90, \bar{Y}_A = 35,$$

$$\bar{X}_B = 30, \bar{Y}_B = 25 \text{ olsun.}$$

Mevcut toplam miktar,

$$\bar{X}_A + \bar{X}_B = 120 = X \text{ in toplam arzı,}$$

$$\bar{Y}_A + \bar{Y}_B = 60, Y \text{ nin toplam arzıdır.}$$

Arz ve talep eşitliğinden,

$$X_{AX} + X_{BX} = 120 = \bar{X}_A + \bar{X}_B,$$

$$Y_{AX} + Y_{BX} = 60 = \bar{Y}_A + \bar{Y}_B \text{ dir.}$$

$$P_y = 1 \text{ olsun.}$$

Bütçe doğruları,

$$A \text{ nin Bütçe doğrusu} = P_x X_A + Y_A = 90P_x + 35,$$

$$B \text{ nin bütçe doğrusu} = P_x X_B + Y_B = 30P_x + 25 \text{ dir.}$$

Denge fiyat oranı,

A nin problemi,

$$\text{Max } U_A = X_A Y_A,$$

$$\text{Sınırlayıcı koşul} = P_x X_A + Y_A = 90P_x + 35,$$

A nin Lagrange denklemi,

$$Z = X_A Y_A - \lambda_A (90P_x + 35 - P_x X_A - Y_A) \text{ dir.}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_A} = Y_A - \lambda_A P_x = 0, \quad \lambda_A = \frac{Y_A}{P_x},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y_A} = X_A - \lambda_A = 0, \quad \lambda_A = X_A,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda_A} = 90P_x + 35 - P_x X_A - Y_A = 0 \text{ dir.}$$

$$\lambda_A = X_A = \frac{Y_A}{P_x} \text{ dir.}$$

$$90P_x + 35 - P_x \left(\frac{Y_A}{P_x} \right) - Y_A = 0,$$

$Y_A = 45P_x + 17.5$, A 'nın Y talebidir.

$X_A = 1/P_x(45P_x + 17.5)$ den,

$$X_A = 45 + \frac{17.5}{P_x}, A \text{'nin } X \text{ talebidir.}$$

B 'nin Problemi,

Max $U_B = X_B Y_B$,

Kısıtlayıcı koşul, $P_x X_B + Y_B = 30P_x + 25$ dir.

B 'nin Lagrange denklemi,

$Z = X_B Y_B + \lambda_B(30P_x + 25 - P_x X_B - Y_B)$ dir.

$$\frac{\partial Z}{\partial X_B} = Y_B - \lambda_B P_x = 0, \quad \lambda_B = \frac{Y_B}{P_x},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y_B} = X_B - \lambda_B = 0, \quad \lambda_B = X_B,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda_B} = 30 - P_x + 25 - P_x X_B - Y_B = 0 \text{ dir.}$$

Buradan,

$$\lambda_B = X_B = \frac{Y_B}{P_x},$$

$30P_x + 25 - P_x(Y_B / P_x) - Y_B = 0$ dir.

$Y_B = 15P_x + 12.5$, B 'nin Y malı talebidir.

$X_B = 1/P_x(15P_x + 12.5)$ den,

$$X_B = 15 + \frac{12.5}{P_x}, B \text{'nin } X \text{ malı talebidir.}$$

$Y_A = 45P_x + 17.5$,

$Y_B = 15P_x + 12.5$ idi.

Buradan,

$$Y_A + Y_B = 45P_x + 17.5 + 15P_x + 12.5 = 60 = \bar{Y}_A + \bar{Y}_B \text{ dir.}$$

Buradan,

$$60P_x + 30 = 60 \text{ dan, } P_x = 1/2 \text{ dir.}$$

Bu durumda,

$$Y_A = 45(1/2) + 17.5 = 40,$$

$$Y_B = 15(1/2) + 12.5 = 20 \text{ bulunur.}$$

$$X_A = 45 + 17.5(2) = 80,$$

$$X_B = 15 + 12.5(2) = 40 \text{ olur.}$$

Sonuçlar kontrol edilirse,

$$X_A + X_B = 80 + 40 = 120, Y_A + Y_B = 40 + 20 = 60 \text{ dir.}$$

Aynı şekilde,

$$MRS_A = \frac{Y_A}{X_A} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2},$$

$$MRS_B = \frac{Y_B}{X_B} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \text{ olarak gerçekleşir.}$$

Yani,

$$MRS_A = MRS_B = \frac{P_x}{P_y} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Buradan, marjinal dönüşüm oranından hareketle, genel denge durumuna giriş yapabiliriz.

A'nın fayda kısıtlaması altında B'nin faydasını maksimize etmesini ele alalım.

$$\text{Max } U_B(X_B, Y_B)$$

$$\text{Kısıtlayıcı koşullar, } U_A(X_A, Y_A) = \bar{U}_A,$$

$$X_A + X_B = X,$$

$$Y_A + Y_B = Y,$$

$$Y = y(X) \text{ dir.}$$

$$Z = U_B(X_B, Y_B) + \lambda_1 \{ \bar{U}_A - U_A(X_A, Y_A) \} - \lambda_2 (X - X_A - X_B) + \lambda_3 (Y - Y_A - Y_B) + \lambda_4 \{ Y - y(X) \} \text{ dir.}$$

Dört sınırlayıcı durum vardır.

$$\frac{\partial Z}{\partial X_B} = \frac{\partial U}{\partial X_B} - \lambda_2 = 0, \quad MU_{X_B} = \lambda_2,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y_B} = \frac{\partial U}{\partial Y_B} - \lambda_3 = 0, \quad MU_{Y_B} = \lambda_3 = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_A} = -\lambda_1 \frac{\partial U}{\partial X_A} - \lambda_2 = 0, \quad -\lambda_1 MU_{X_A} = \lambda_2,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y_A} = -\lambda_1 \frac{\partial U}{\partial Y_A} - \lambda_3 = 0, \quad -\lambda_1 MU_{Y_B} = \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \quad \lambda_3 = -\lambda_4$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = -\lambda_2 - \lambda_4 \frac{dY}{dX} = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_4 \frac{dY}{dX}$$

$$MRT = -\frac{dY}{dX} \text{ idi.}$$

Buradan,

$$\lambda_2 = \lambda_3 MRT \text{ dir.}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = MRT = \frac{MU_{X_B}}{MU_{Y_B}} = \frac{-\lambda_1 MU_{X_A}}{-\lambda_1 MU_{Y_A}} = \frac{MU_{X_A}}{MU_{Y_A}} \text{ dir.}$$

Kısaca $MRT_{YX} = MRS_{AYX} = MRS_{BYX}$ dir. Yani A ve B tüketicisinin marjinal ikame oranları ve marjinal dönüşüm oranları eşittir.