BÖLÜM 10

DOLAYSIZ ÇARPIMLAR

Bu bölümü bitirdiğinizde,

- dış dolaysız çarpım, dış dolaysız toplam
- dış dolaysız toplamla ilgili bazı özellikler
- Çin Kalan Teoremi
- iç dolaysız çarpım

hakkında bilgi sahibi olabileceksiniz.

BÖLÜM 10

DOLAYSIZ ÇARPIMLAR

Bilinen gruplardan yeni bir grup oluşturmanın doğal yollarından biri, bunların kartezyen çarpımını düşünmektir.

$G_1, G_2, \ldots, G_n$ grupları verilmiş olsun. Her $i = 1, 2, \ldots, n$ için i-inci bileşeni G_i içinde olan sıralı n-lilerden oluşan kümeyi $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$ ile göstereceğiz:

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n = \{ \ (g_1, g_2, \ldots, g_n) : \ g_i \in G_i \ , \ 1 \leq i \leq n \ \}.$$

$G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$ nin iki elemanı $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, $(g_1', g_2', \ldots, g_n')$ için

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n)(g_1', g_2', \ldots, g_n') = (g_1 g_1', g_2 g_2', \ldots, g_n g_n')$$

tanımlanırsa, $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$ içinde bir ikili işlem elde edilir. Burada, $g_i g_i'$ nün, G_i nin ikili işlemine göre hesaplanacağı açıktır. Bu ikili işleme göre $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$ nin birleşme özelliğine sahip olduğu; eğer her bir $i = 1, 2, \ldots, n$ için G_i nin birim elemanı e_i ise, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ nin de $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$ nin birim elemanı olduğu ve ayrıca, $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$ nin her elemanının tersinir olduğu, kolayca görülebilir. Dolayısıyla, bu ikili işlemle, $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$ bir gruptur. Bunların kanıtını okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz.

Tanım 1. $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$ ye $G_1, G_2, \ldots, G_n$ gruplarının *dış dolaysız çarpımı* (veya *dış dolaysız toplamı*) denir. □

Örnek 1. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$. Bu, mertebesi 6 olan bir Abel grubudur. Bu grup içinde $(1,1)$ in ürettiği devirli altgrup,

$$< (1,1) >= \{(0,0),(1,1),(0,2),(1,0),(0,1),(1,2)\}$$

$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ ün tamamıdır. O halde, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ bir devirli gruptur ve $\mathbb{Z}_6$ ya izomorftur. □

Örnek 2. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)\}$. Bu, mertebesi 4 olan bir gruptur. Bu grubun, birim elemanı $(0,0)$ dışında her elemanının mertebesi 2 dir. Daha önce bu gruba izomorf olan bir grupla karşılaştınız mı? Hangi grup? □

Dış dolaysız çarpım, çarpanlarının ortak özelliklerinden pek çoğunu taşır. Örneğin, çarpanlardan her biri Abel grubu ise, dolaysız çarpım da Abel grubudur(Bak. Alıştırma 1). Bu bağlamda, kolayca kanıtlanabilecek bir önerme şudur:

Önerme 1. *$G_1, \ldots, G_n$ ve $G_1^*, \ldots, G_n^*$ gruplar; $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$ ve $G^* = G_1^* \oplus \cdots \oplus G_n^*$ olsun. Eğer her $j = 1, \ldots, n$ için $G_j \cong G_j^*$ ise, $G \cong G^*$ dır.*

Kanıt. Her $j = 1, \ldots, n$ için G_j ile G_j^* arasındaki izomorfizm f_j olsun. Bu takdirde, $f : G \longrightarrow G^*$, $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))$ dönüşümü G den G^* a bir izomorfizm olur. ■

Aşağıdaki teoremde dış dolaysız çarpımın bir elemanının mertebesinin o elemanın bileşenlerinin mertebeleri ile tamamen belirlendiğini göreceğiz.

Teorem 1. *$G_1, \ldots, G_n$ gruplar, $g_i \in G_i$, $1 \leq i \leq n$ olsun. Bu takdirde,*

(*i*) *$|(g_1, \ldots, g_n)|$ sonludur $\Longleftrightarrow$ her bir $|g_i|$ sonludur.*

(*ii*) *Her bir $|g_i|$ sonlu ise, $|(g_1, \ldots, g_n)| = okek(|g_1|, \ldots, |g_n|)$ dir.*

Kanıt. $(g_1, \ldots, g_n)$ nin mertebesi t ise, her $i = 1, \ldots, n$ için G_i nin birim elemanı e_i olmak üzere, $(g_1, \ldots, g_n)^t = (g_1^t, \ldots, g_n^t) = (e_1, \ldots, e_n)$ ve böylece, $g_i^t = e_i$, $1 \leq i \leq n$, olur. Bu, her bir g_i nin mertebesinin sonlu olduğunu gösterir. Ek olarak, bu durumda her bir g_i nin mertebesinin t yi böldüğü görülmektedir. Karşıt olarak, her bir g_i nin mertebesinin sonlu olduğunu kabul edelim ve $s = okek\{|g_1|, \ldots, |g_n|\}$ alalım. Bu takdirde, her $i = 1, ..., n$ için $g_i^s = e_i$ ve $(g_1, \ldots, g_n)^s = (g_1^s, \ldots, g_n^s) = (e_1, \ldots, e_n)$ olacağından, $(g_1, \ldots, g_n)$ nin mertebesi $t \leq s$ sonlu olur. Kanıtın birinci kısmının sonunda görüldüğü üzere, bu durumda, her $i = 1, \ldots, n$ için $|g_i| \mid t$. Dolayısıyla, $s \mid t$, $s \leq t$ olur. Sonuç olarak, $s = t$ dir. ∎

Örnek 3. $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{12}$ nin mertebesi 6 olan tüm elemanlarını bulmaya çalışalım. $(a, b) \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{12}$ ve $|(a, b)| = 6$ ise, üç durum söz konusudur:

$$|a| = 1 \text{ ve } |b| = 6\ ;\ |a| = 3 \text{ ve } |b| = 2\ ;\ |a| = 3 \text{ ve } |b| = 6.$$

($|a| = 2$ yi veya $|b| = 4$ ü niçin düşünmedik?). Birinci durum, yani $|a| = 1$ ve $|b| = 6$ hali için tam 2 seçenek vardır ($\varphi(6) = 2$). İkinci durum, yani $|a| = 3$ ve $|b| = 2$ hali için de tam 2 seçenek vardır ($\varphi(3) \cdot \varphi(2) = 2$). Üçüncü durum, yani $|a| = 3$ ve $|b| = 6$ hali için tam 4 seçenek vardır ($\varphi(3) \cdot \varphi(6) = 4$). Böylece, $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{12}$ içinde mertebesi 6 olan tam 8 eleman vardır. □

Örnek 4. Önceki örnekte, $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{12}$ nin mertebesi 6 olan tüm elemanlarının sayısını 8 olarak belirledik. Bundan yararlanarak, $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{12}$ nin mertebesi 6 olan devirli altgruplarının sayısını da belirleyebiliriz. Gerçekten, mertebesi 6 olan her devirli grubun tam $\varphi(6) = 2$ tane üreteci bulunduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{12}$ nin mertebesi 6 olan 8 tane elemanı öyle dört tane ayrık ikililere ayrılabilir ki her bir ikilinin her bir elemanı aynı devirli alt grubu üretir. Sonuç olarak, $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{12}$ grubunun, mertebesi 6 olan devirli altgruplarının sayısı, $\frac{8}{\varphi(6)} = \frac{8}{2} = 4$ tür. □

$G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$ dış dolaysız çarpımında her bir G_i grubu Abel grubu ise, $G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$ de bir Abel grubudur. Yukarıdaki örneklerden de anlaşılacağı üzere, her bir G_i devirli olsa dahi $G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$ devirli olmayabilir. Aşağıdaki teorem ve onun sonucu, $G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$ nin ne zaman devirli olacağını (sonlu gruplar için) belirler.

Teorem 2. *G_1 ve G_2 sonlu devirli gruplar olsun. Bu takdirde, $G_1 \oplus G_2$ nin devirli olması için gerek ve yeter koşul, $|G_1|$ ve $|G_2|$ nin aralarında asal olmasıdır.*

Kanıt. G_1 ve G_2 sonlu devirli gruplar; $G_1 = < x_1 >$, $G_2 = < x_2 >$, $|G_1| = m_1$ ve $|G_2| = m_2$ olsun. Böylece, $|G_1 \oplus G_2| = m_1 m_2$ olur. Önce, $G_1 \oplus G_2$ nin devirli olduğunu, $G_1 \oplus G_2 = < (a_1, a_2) >$; $a_1 \in G_1$, $a_2 \in G_2$ kabul edelim. O zaman, $m_1 m_2 = |G_1 \oplus G_2| = |(a_1, a_2)| = okek(|a_1|, |a_2|)$ olur. Diğer yandan, Lagrange Teoremi'nin üçüncü sonucuna göre, $|a_1|$ sayısı m_1 i ve $|a_2|$ sayısı da m_2 yi böldüğünden, $m_1 m_2 = okek(|a_1|, |a_2|)$ sayısı $okek(m_1, m_2)$ yi böler. Bu, sadece $okek(m_1, m_2) = m_1 m_2$ olunca ve bu eşitlik de m_1 ve m_2 aralarında asal olunca mümkündür. Karşıt olarak, yukarıdaki gösterimle, m_1 ve m_2 aralarında asal ise,

$$|(x_1, x_2)| = okek(|x_1|, |x_2|) = okek(m_1, m_2) = m_1 m_2$$

olacağından, $G_1 \oplus G_2 = < (x_1, x_2) >$ olur. ■

Sonuç 1. *$G_1, \ldots, G_n$ sonlu devirli gruplar olsun. $G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$ nin devirli grup olması için gerek ve yeter koşul, her $i \neq j$ için $|G_i|$ ile $|G_j|$ nin aralarında asal olmasıdır.*

Kanıt. n üzerinde tümevarım. ■

Sonuç 2. *$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$; $n = n_1 \cdots n_k$ olsun. Bu takdirde,*

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_k} \Longleftrightarrow \text{ her } i \neq j \text{ için } (n_i, n_j) = 1$$

dir.

Kanıt. Sonuç 1 ve Örnek 9.4 ten görülür. Çin Kalan Teoremi'nin kanıtına da bakınız. ■

Örnek 5. Yukarıdaki sonuçtan yararlanarak şu izomorfizmlerin varlığını gözlemleyebiliriz:

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6,$$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}_{30}.$$ □

Teorem 3(Çin Kalan Teoremi). *$n_1, \ldots, n_k$ ikişer ikişer aralarında asal olan doğal sayılar ve $a_1, \ldots, a_k$ herhangi tamsayılar ise, öyle bir x tamsayısı vardır ki her $i = 1, \ldots, k$ için $x \equiv a_i \ (mod\ n_i)$ dir. Ayrıca, $n = n_1 \cdots n_k$ olmak üzere, burada sözü edilen x tamsayısı n modunda tek türlü belirlidir.*

Kanıt. $n = n_1 \cdots n_k$ olsun. Her $x \in \mathbb{Z}_n$ ve her $i = 1, \ldots, k$ için $x \equiv x_i \ (mod\ n_i)$, $x_i \in \mathbb{Z}_{n_i}$ olmak üzere

$$f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_k} \quad , \quad f(x) = (x_1, \ldots, x_k)$$

tanımlayalım. f iyi tanımlı bir fonksiyondur. Eğer $x, y \in \mathbb{Z}_n$ ve $f(x) = f(y)$ ise, o zaman, her $i = 1, \ldots, k$ için $x \equiv y \ (mod\ n_i)$ olur. $n_1, \ldots, n_k$ sayıları ikişer ikişer aralarında asal olduğundan, bu durumda $x \equiv y \ (mod\ n)$; yani $\mathbb{Z}_n$ içinde $x = y$ olur. O halde, f fonksiyonu birebirdir. Diğer yandan, $|\mathbb{Z}_n| = |\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}|$ olduğundan, f fonksiyonu örten olmak zorundadır. Dolayısıyla, her $(b_1, \ldots, b_k) \in \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$ için öyle $x \in \mathbb{Z}_n$ vardır ki, $f(x) = (b_1, \ldots, b_k)$ dır. Şimdi, her $i = 1, \ldots, k$ için $a_i \equiv b_i \ (mod\ n_i)$, $b_i \in \mathbb{Z}_{n_i}$ olsun ve $f(x) = (b_1, \ldots, b_k)$ olan bir $x \in \mathbb{Z}_n$ seçelim. Bu x, istenilenleri sağlar. Eğer y tamsayısı da her $i = 1, \ldots, k$ için $y \equiv a_i \ (mod\ n_i)$ denkliklerini sağlıyorsa, her $i = 1, \ldots, k$ için $y \equiv x \ (mod\ n_i)$ olur. $n_1, \ldots, n_k$ sayıları ikişer ikişer aralarında asal olduğundan, $y \equiv x \ (mod\ n)$ olur. Bu, iddianın son kısmını kanıtlar. ∎

Çin Kalan Teoremi'nin yukarıda verilen kanıtında, x tamsayısının varlığı gösterilmekle beraber nasıl bulunacağı hususunda bir fikir yoktur. Bu tür kanıtlara *inşacı olmayan* kanıt denir. Çeşitli kaynaklarda, Çin Kalan Teoremi'nin *inşacı* kanıtlarını bulmak mümkündür. Genellikle, x tamsayısı şöyle bulunur: Her $i = 1, \ldots, k$ için $s_i = \frac{n}{n_i}$ tanımlanırsa, s_i ve n_i sayıları aralarında asal olduğundan $s_i t_i \equiv 1 \ (mod\ n_i)$ olacak şekilde bir $t_i \in \mathbb{Z}_{n_i}$ bulunur. $x = s_1 t_1 a_1 + \cdots + s_k t_k a_k$ tamsayısı istenilenleri sağlar.

Örnek 6. Öyle bir x tamsayısı bulalım ki, 5, 8 ve 11 sayıları ile bölününce, sırasıyla, 3, 2 ve 7 kalanlarını versin. Kongruans gösterimi ile, öyle bir x tamsayısı isteniyor ki $x \equiv 3 \ (mod\ 5)$, $x \equiv 2 \ (mod\ 8)$, $x \equiv 7 \ (mod\ 11)$ olsun. Çin Kalan Teoremi'ndeki gösterimlerle, $a_1 = 3$,

$a_2 = 2$, $a_3 = 7$ ve $n_1 = 5$, $n_2 = 8$, $n_3 = 11$ dir. Önceki paragrafta verilenler doğrultusunda, $n = 440$, $s_1 = 88$, $s_2 = 55$, $s_3 = 40$ tır ve deneme yanılma yoluyla dahi $t_1 = 2$, $t_2 = 7$, $t_3 = 8$ alabileceğimizi görürüz. Böylece,

$$x = 88 \cdot 2 \cdot 3 + 55 \cdot 7 \cdot 2 + 40 \cdot 8 \cdot 7 = 528 + 770 + 2240 = 3538$$

sayısı istenilenleri sağlar. İstenilen özellikte en küçük pozitif x tamsayısı nedir? □

Dış dolaysız çarpım ile bir takım gruplar yan yana getirilerek yeni bir grup oluşturulmaktadır. Bu noktada, grupların dış dolaysız çarpımını tamsayıların çarpımına benzeterek, "acaba verilen bir tamsayıyı asal çarpanlarına ayırdığımız gibi, verilen bir grubu da yapısı daha iyi bilinen bazı grupların dış dolaysız çarpımı olarak ifade edebilir miyiz, ya da böyle bir dış dolaysız çarpıma izomorf olduğunu gösterebilir miyiz?" sorusu sorulabilir. Bu sorunun yanıtı, en azından sonlu Abel grupları için, olumludur (Bak. Bölüm 11). Bu bağlamda, G bir grup ve $H_1, \ldots, H_n$ onun altgrupları ise,

$$H_1 \cdots H_n = \{ \ h_1 \cdots h_n : \ h_i \in H_i, \quad 1 \leq i \leq n \ \}$$

tanımlayalım. $H_1 \cdots H_n$ kümesi, G nin sadece bir altkümesidir; altgrup olması gerekmez. Ancak, altgrup olduğu durumlar da vardır.

Örnek 7. $\mathcal{S}_3$ ün $H_1 = \{\imath, (1\ 2)\}$, $H_2 = \{\imath, (1\ 3)\}$ altgrupları için

$$H_1 H_2 = \{\imath, (1\ 2), (1\ 3), (1\ 2)(1\ 3)\} = \{\imath, (1\ 2), (1\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

olur ve $H_1 H_2$, $\mathcal{S}_3$ ün bir altgrubu değildir(Neden?). □

Örnek 8. $\mathbb{Z}_{36}^* = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35\}$ grubu içinde, $H_1 = \{1, 13, 25\}$, $H_2 = \{1, 17)\}$, $H_3 = \{1, 19\}$ için

$$H_1 H_2 = \{1, 5, 13, 17, 25, 29\}, \ H_2 H_3 = \{1, 17, 19, 35\},$$

$$H_1 H_2 H_3 = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35\}$$

olur. Burada $H_1 \cap H_2 = H_1 H_2 \cap H_3 = \{1\}$ ve $H_1 H_2 H_3 = \mathbb{Z}_{36}^*$ olduğuna dikkat ediniz. □

Örnek 9. $\mathcal{S}_3$ grubu içinde, $H_1 = \{\imath, (1\ 2)\}$, $H_2 = \{\imath, (1\ 3)\}$ ve

$H_3 = \{\imath, (2\ 3)\}$ altgrupları alınırsa,

$$H_1H_2 = \{\imath, (1\ 2), (1\ 3), (1\ 3\ 2)\} \quad , \quad H_2H_3 = \{\imath, (1\ 3), (2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \ ,$$

$$H_1H_2H_3 = \{\imath, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

olur. Burada $H_1H_2 \not\leq \mathcal{S}_3$, $H_1H_2H_3 = \mathcal{S}_3$ olduğuna dikkat ediniz. □

Tanım 2. G bir grup; $H_1, \ldots, H_n$ onun altgrupları olsun. Aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa, G grubu $H_1, \ldots, H_n$ altgruplarının *iç dolaysız çarpımıdır* denir ve $G = H_1 \times \cdots \times H_n$ yazılır:

(`idç.1`) $G = H_1 \cdots H_n$.

(`idç.2`) Her $i \neq j$, $h_i \in H_i$, $h_j \in H_j$ için $h_ih_j = h_jh_i$ dir.

(`idç.3`) Her $i = 1, \ldots, n-1$ için $(H_1 \cdots H_i) \cap H_{i+1} = \{e\}$ dir. □

Örnek 10. $\mathbb{Z}_{36}^*$ nın Örnek 8'de verilen H_1, H_2, H_3 altgrupları için $\mathbb{Z}_{36}^* = H_1H_2H_3$; her $i \neq j$, $h_i \in H_i$, $h_j \in H_j$ için $h_ih_j = h_jh_i$ ve ek olarak $(H_1 \cap H_2) = (H_1H_2) \cap H_3 = \{1\}$ olduğundan, $\mathbb{Z}_{36}^* = H_1 \times H_2 \times H_3$ tür. □

Örnek 11. $\mathcal{S}_3$ ün Örnek 9'da verilen H_1, H_2, H_3 altgrupları için ilk koşul olan $\mathcal{S}_3 = H_1H_2H_3$ koşulu sağlanmakla beraber, $(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3)$, $(2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2)$ den görüldüğü üzere Tanım 2 nin ikinci koşulu sağlanmamaktadır. Bu nedenle, $\mathcal{S}_3 \neq H_1 \times H_2 \times H_3$ tür. □

Gözlem 1. İç dolaysız çarpım tanımındaki (`idç.3`) koşulu aşağıdaki koşulla değiştirilebilir:

(`idç.3'`) Her $i = 1, \ldots, n$ için $(H_1 \cdots H_{i-1}H_{i+1} \cdots H_n) \cap H_i = \{e\}$ dir.

Başka bir deyişle, $G = H_1 \times \cdots \times H_n$ olması için, tanımdaki koşullar yerine, (`idç.1`), (`idç.2`) ve (`idç.3'`) koşullarının sağlanması gerekli ve yeterlidir. Gerçekten, $G = H_1 \times \cdots \times H_n$ ise, (`idç.3'`) nün sağlandığını görmek için, $h_i \in H_i$ olmak üzere $h_1 \cdots h_{i-1}h_{i+1} \cdots h_n = h_i$ olması durumunda, (`idç.2`) kullanılarak

$$h_n = h_{n-1}^{-1} \cdots h_{i+1}^{-1}h_{i-1}^{-1} \cdots h_1^{-1}h_i = h_1^{-1} \cdots h_{i-1}^{-1}h_ih_{i+1}^{-1} \cdots h_{n-1}^{-1}$$

ifadesinden $h_n \in (H_1 \cdots H_{n-1}) \cap H_n$ olacağından, $h_n = e$ olduğu görülür. Aynı düşünce tekrarlanmak suretiyle $h_{n-1} = \cdots = h_{i+1} = h_i = e$ olduğu görülür. (`idç.1`), (`idç.2`) ve (`idç.3'`) sağlanıyorsa, (`idç.3`) ün sağlandığını görmek kolaydır:

$$(H_1 \cdots H_{i-1}) \cap H_i \subseteq (H_1 \cdots H_{i-1} H_{i+1} \cdots H_n) \cap H_i = \{e\}. \qquad \square$$

Gözlem 2. Eğer $G = H_1 \times \cdots \times H_n$ ise, (`idç.2`) koşulundan dolayı, $H_1 \cdots H_n = H_{\sigma(1)} \cdots H_{\sigma(n)}$ olduğu göz önüne alınarak, her $\sigma \in \mathcal{S}_n$ için $G = H_{\sigma(1)} \times \cdots \times H_{\sigma(n)}$ dir. $\square$

Gözlem 3. $G = H_1 \times \cdots \times H_n$ ve $1 \leq k \leq n$ olmak üzere, herhangi bir k için $H_k = H_{k_1} \times \cdots \times H_{k_r}$ ise,

$$G = H_1 \times \cdots \times H_{k-1} \times H_{k_1} \times \cdots \times H_{k_r} \times H_{k+1} \times \cdots \times H_n$$

olur. Bunu kanıtlarken, Gözlem 2 yi kullanarak $k = 1$ kabul edebilirsiniz. $\square$

İç dolaysız çarpımda, bir grup ve onun alt grupları söz konusudur. Bununla beraber, aşağıda görüleceği üzere, her iç dolaysız çarpım, bir dış dolaysız çarpıma izomorftur. Teorem 4 ün kanıtını incelerken, bu izomorfizmde, Tanım 2 nin ikinci ve üçüncü koşullarının ne denli önemli rolleri olduğuna dikkat ediniz.

Teorem 4. *G bir grup; $H_1, \ldots, H_n$ onun altgrupları olsun. Eğer G, bu altgruplarının iç dolaysız çarpımı, yani $G = H_1 \times \cdots \times H_n$ ise, $G \cong H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$ dir.*

Kanıt. $\Phi : H_1 \oplus \cdots \oplus H_n \longrightarrow G$ şöyle tanımlansın:

$$\Phi(h_1, \ldots, h_n) = h_1 \cdots h_n \ .$$

Önce Φ nin bire-bir olduğunu gösterelim. Eğer $h_i, k_i \in H_i, 1 \leq i \leq n$ olmak üzere, $\Phi(h_1, \ldots, h_n) = \Phi(k_1, \ldots, k_n)$, yani $h_1 \cdots h_n = k_1 \cdots k_n$, ise, her $i = 1, \ldots, n$ için $h_i = k_i$ olduğunu göstermeliyiz. $h_i \neq k_i$ olan i ler bulunduğunu farz edelim ve bunlardan en büyüğü j olsun:

$$1 \leq j \leq n, \ \ h_j \neq k_j \text{ ve her } i > j \text{ için } h_i = k_i.$$

O zaman, $j \geq 2$ dir ve

$$h_1 \cdots h_n = k_1 \cdots k_n \Longrightarrow h_1 \cdots h_j = k_1 \cdots k_j$$
$$\Longrightarrow {k_{j-1}}^{-1} \cdots {k_2}^{-1} {k_1}^{-1} h_1 \cdots h_{j-1} = k_j h_j^{-1}$$

dir. (`idç.2`) koşulu kullanılarak; örneğin, $k_2^{-1}({k_1}^{-1})h_1 = ({k_1}^{-1}h_1){k_2}^{-1}$, $k_3^{-1}({k_1}^{-1})h_1 = ({k_1}^{-1}h_1){k_3}^{-1}$, $k_3^{-1}({k_2}^{-1})h_2 = ({k_2}^{-1}h_2){k_3}^{-1}$ ve benzeri eşitliklerle, yukarıdaki son eşitlik

$$(k_1^{-1}h_1)(k_2^{-1}h_2) \cdots ({k_{j-1}}^{-1}h_{j-1}) = k_j {h_j}^{-1}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliğin sol ve sağ yanları değerlendirilirse, $k_j h_j^{-1}$ in $(H_1 \ldots H_{j-1}) \cap H_j$ kesişimine ait olduğu görülür. Tanım 2 nin üçüncü koşulu (`idç.3`) e göre, $k_j h_j^{-1} = e$, $h_j = k_j$ olması gerekir. Bu çelişki, her $i = 1, \ldots, n$ için $h_i = k_i$ olması gerektiğini ve dolayısıyla, Φ nin bire-bir olduğunu gösterir. Φ nin örten olduğu, (`idç.1`) den hemen görülür. Ayrıca, her $(h_1, \ldots, h_n)$, $(k_1, \ldots, k_n) \in H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$ için

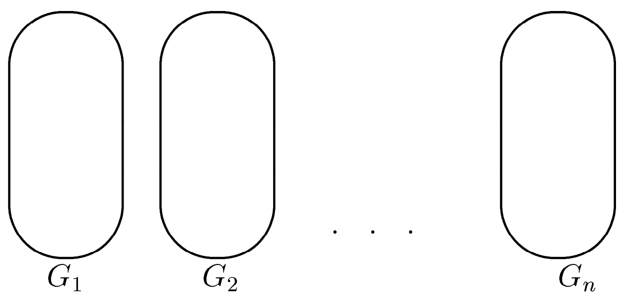
$$\Phi((h_1, \ldots, h_n)(k_1, \ldots, k_n)) = \Phi(h_1k_1, \ldots, h_nk_n) = h_1k_1h_2k_2 \cdots h_nk_n$$

dir ve (`idç.2`) den; $i \neq j$, $h_i \in H_i$, $k_j \in H_j$ olunca $h_ik_j = k_jh_i$ olduğundan,

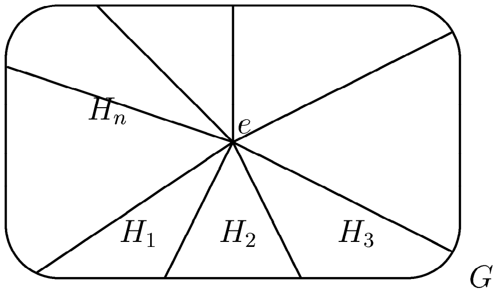
$$\Phi((h_1, \ldots, h_n)(k_1, \ldots, k_n)) = h_1k_1h_2k_2 \cdots h_nk_n = h_1h_2 \cdots h_nk_1k_2 \cdots k_n$$
$$= \Phi(h_1, h_2, \ldots, h_n)\Phi(k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

dir. Bu, Φ nin bir izomorfizm olduğunu gösterir ve kanıtı tamamlar. ∎

İç dolaysız çarpım ve dış dolaysız çarpım arasında yukarıdaki teoremde verilen önemli bağıntıya rağmen, bu iki kavramın yapısal olarak birbirinden çok farklı olduğunu unutmamak gerekir. Dış dolaysız çarpımı düşünülen gruplar herhangi gruplar olabilir: $G_1, \ldots, G_n$.



İç dolaysız çarpımı düşünülen grupların ise belli bir G grubunun Tanım 2 deki koşulları sağlayan altgrupları olması gerekir:



G bir grup; $H \leq K$, $K \leq G$ ise, Tanım 2 daha basit bir görünüm alır: $G = H \times K$ olması için

$$(\texttt{idç.1})G = HK, \ \ (\texttt{idç.2})h \in H, k \in K \Rightarrow hk = kh, \ \ (\texttt{idç.3})H \cap K = \{e\}$$

koşulları gerekli ve yeterlidir.

Örnek 12. Toplamsal grup $\mathbb{C}$ içinde, $H = \{a : a \in \mathbb{R}\}$ ve $K = \{bi : b \in \mathbb{R}\}$ altgruplarını alalım. Yukarıdaki sırayla, $H + K = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$, $h \in H$, $k \in K \Longrightarrow h + k = k + h$ ve $H \cap K = \{0\}$ olduğundan, $\mathbb{C} = H \times K$ dır. $\square$