OYUN TEORİSİ 2

OYUN TEORİSİ

1. Giriş

Oyun teorisi stratejik karşılıklı etkileşimleri (interaction) modelleyen uygulamalı matematiğin bir dalıdır. Karşılıklı etkileşim durumu bir ajanın skorunun bir başka ajanın seçtiği stratejiye bağlı olmasından oluşmaktadır.

Oyunların sınıflandırılmasında birçok yol olanaklıdır. Bunlardan biri statik ve dinamik olarak ayırmadır. Statik oyunlarda kararlar aynı anda alınmaktadır. Ayrıca, oyuncular tek bir eylem seçmekte ve oyun böylelikle sona ermektedir. Böyle oyunlar tek atışlı oyunlar olarak algılanmaktadır. Dinamik oyunlarda kararlar ardışıktır. Çoklu zaman periodları oyuncular için birden fazla hareket fırsatı gibi olanaklar sağlamaktadır.

2. Normal Biçimde Oyunlar

Her oyunun belirli özelikleri ve elemanları vardır. Statik oyunlarda, bu elemanlar kümeler ve fonksiyonlar ile tanımlanmaktadır. Bir oyunun normal biçimde sunulması oyuncu kümesinin her oyuncu için strateji kümesinin ve her oyuncu için skor fonksiyonunun olması demektir. N oyuncu sayısını belirtsin. Buna göre,

$$N = \{1, 2, 3, \ldots.., n\} \qquad (1)$$ olur.

n toplam oyuncu sayısıdır. Her oyuncu strateji kümesinden seçim yapmaktadır. Strateji bir oyuncunun oyun sırasında kullanabileceği eylemlerini göstermektedir. Bazı durumlarda strateji kümesi küçük olabilir, örneğin yüksek fiyat ya da düşük fiyat istemek gibi. Ancak baı durumlarda da çok büyük olabilir, örneğin satranç, dama gibi oyunlarda tahtada olanaklı bütün hareketler birer stratejidir. s_{ij} i. oyuncunun j stratejisi olarak ifade edilecektir. i oyuncusu için bütün stratejilerinin kümesi S_i ile gösterilir:

$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, ..., s_{it_i}\}$ (2) yazılır.

t_i, i oyuncusu için toplam kullanılabilir stratejilerin sayısıdır. Bütün oyuncuların stratejilerinin kümesi S ile gösterilmektedir.

$S = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_n\}$ (3) olur.

Son olarak, oyuncuların skor fonksiyonları çıktı olarak tanımlanmaktadır. Genelde, bir oyuncunun skoru (fonksiyonu) bütün oyuncuların seçtiği stratejilere bağlıdır. i oyuncusu için skor fonksiyonu Π_i ile gösterilmektedir:

$\Pi_i = \Pi_i \{s_1, s_2, s_3, ..., s_n\}$ (4) dür.

s_i, i oyuncusu tarafından seçilmiş stratejisini göstermektedir.

2.1. Örnek

Reklam veren iki firma oyununu yukarıdakileri kavramak için kullanalım. Öncelikle aşağıdaki varsayımları ortaya koymalıyız;

1) İki firma bir malı sabit (dışsal) fiyatla satmaktadır.
2) Reklam piyasa talebinin düzeyini etkilememektedir.
3) Her firma reklam düzeyini "yüksek" veya "alçak" olarak seçmektedir.
4) Her firmanın piyasa payı firmalar tarafından seçilmiş göreceli reklam düzeyine bağlıdır.

Şimdi bu varsayımları oyun teorisi varsayımlarına çevirelim. İki oyuncunun (firmanın) iki stratejisinden (yüksek, alçak) oluşan strateji kümesi vardır; bir firma için strateji kümesi;

$S_i = \{A_L, A_H\}$ (5) dir.

Skor fonksiyonlarını yazmak için, ek değişkenler tanımlamalıyız. Π_0 endüstri için kar düzeyi olsun. m_{jk} firmanın j stratejisini (j=L ya da j=H) seçtiğinde diğer firmanın da k stratejisini (k=L ya da k=H) seçtiğindeki piyasa payı olsun. Ayrıca, $m_{jk} + m_{kj} = 1$'dir.

Dört olanaklı reklam kombinasyonu vardır. Firma 1 için skor fonksiyonları;

$$\begin{aligned}\Pi_1(A_H, A_H) &= m_{HH}\,\Pi_0 - A_H\\ \Pi_1(A_H, A_L) &= m_{HL}\,\Pi_0 - A_H\\ \Pi_1(A_L, A_H) &= m_{LH}\,\Pi_0 - A_L\\ \Pi_1(A_L, A_L) &= m_{LL}\,\Pi_0 - A_L\end{aligned} \qquad (6)$$

olur.

Firma 2 için de aynı eşitliği yazabiliriz. Verileri sayısal hale getirip skor fonksiyonlarını gösteren matris biçiminde oyun gösterilebilir. Şimdi,

$$\Pi_0 = 1000,\ A_H = 400,\ A_L = 200 \qquad (7)$$

ve,

$$m_{HH} = 1/2,\ m_{LL} = 1/2,\ m_{HL} = 4/5,\ m_{LH} = 1/5 \qquad (8)$$

olsun.

Böylece iki firma da yüksek düzeyde reklam yaptığında piyasa payını elli-elli alacaklardır. Brüt karlar 500 ve reklam maliyetinden sonra net kar 100 olacaktır.

Çeşitli çıktıları hesapladıktan sonra skor matrisini yazabiliriz;

		Firma 2	
		L	*H*
Firma 1	L	300,300	0,400
	H	400,0	100,100

Satırlar (sütunlar) firma 1 (2)'nin strateji seçimlerini ve kombinasyonlarını belirtmektedir. Skor matrisindeki birinci (ikinci) sayı firma 1 (2) 'nin skorunu göstermektedir.

Firma 1'in karar vermesini düşünelim. Firma 2 düşük düzey reklam seçsin. Firma 1 *L* stratejisini seçerek 300 kazanacak ya da *H* stratejisini seçerek 400 kazanacaktır. Böylece, *H* firma 1'in en iyi cevabıdır (best response). (Eğer 2 L'yi seçerse) 2, *H*'yi seçerse, yine *H* en iyi cevaptır. Firma 1 için, düşük-reklam-stratejisi kesinlikle mahkum bir stratejidir. Firma 2 tarafından her olanaklı seçim için, firma *H*'den daha fazla skor almaktadır. Aynı sebeple, Firma 2 için de, *H* egemen stratejidir.

İleriki bölümde mahkum stratejilerin elenmesi ile nasıl denge noktalarının bulunduğunu göreceğiz. Bu örneğimizde, her iki firmada da 1 stratejisini seçmediğinden, denge her ikisi için de H stratejisini seçmektedir ve 100 birim kar elde etmektir. (L, L) dengesi iki firma için de daha iyi olduğu halde, firmalar için A_L stratejisi bireysel olarak rasyonel değildir.

Yukarıdaki oyunun genel biçimi mahkumlar çıkmazı olarak bilinmektedir.

2.2. Kesinlikle Mahkum Stratejilerin Elenmesi (KDES) ile Çözüm

Bazı oyunlarda, mahkumlar çıkması gibi, (KDES) lerin elenmesi ile dengeyi bulmak olanaklıdır. Tekrar eden ya da ardıl (successive) elenmesi sonucunda, oyunun denge noktasına ulaşılmaktadır.

TANIM 1: (KDES). *n*-oyunculu bir oyunda, *i* oyuncusu için bir s_i' stratejisi kesinlikle mahkumdur. Eğer ki bazı s_i' stratejileri aşağıdaki koşulu sağlıyorsa; diğer oyuncuların olanaklı bütün stratejileri için

$$\pi_i(s_1, s_2, \ldots\ldots\ldots, s_i', \ldots\ldots\ldots s_n) > \pi_i(s_1, s_2, \ldots\ldots\ldots, s_i', \ldots\ldots s_n) \text{ dır.}$$

Rasyonel birey mahkum bir stratejiyi hiçbir zaman seçmeyeceğinden, bu stratejiyi eleyebiliriz. Yani, orijinal bir G oyununda mahkum stratejiler olduğunda, G oyununa özdeş ancak mahkum stratejiler hariç yeni bir G^1 oyun oluşturabiliriz. Mahkum stratejiler oynanmayacağından yeni oyunun dengesi G oyununda dengesi olacaktır. Ayrıca bu süreç her oyuncunun tek bir stratejisi kalıncaya kadar devam ettiğinde, bu oyunun dengesini oluşturan stratejileri orijinal oyun G'nin de dengesi olacaktır.

2.3. Nash Dengesi

Hiçbir oyuncunun, diğer oyuncuların strateji seçimleri veri alındığında, stratejisini değiştirme güdüsü yok ise, bu strateji kombinasyonu bir Nash dengesidir.

TANIM 2: Nash Dengesi: *n* oyuncu için bir (s_1^*, s_2^*, ...,......., s_n^*) vektörü strateji seçimlerinin belirli bir kümesi olsun. Bu stratejiler aşağıdaki koşulu *i* oyuncusuna kullanışlı her s_i' stratejisi için sağlarsa, bir Nash dengesi oluşturacaktır.

$$\pi_i\,(s_1^*,\ s_2^*,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ s_i^*,\ \ldots\ldots\ldots s_n) \geq \pi_i\,(s_1^*,\ s_2^*,\ldots\ldots\ldots\ s_i',\ldots\ldots s_n)$$

Nash dengesinde hiçbir oyuncunun s_i^* stratejisinin değişime yolunda bir güdüsü yoktur. Bu tanımın iki özelliği öne çıkmaktadır. Birincisi, zayıf eşitsizlik işaretidir. Yani, oyuncuların sadece pozitif güdüsü olmamalıdır. s_1^* stratejisine eşit stratejiler olabilir. İkincisi; birden fazla strateji vektörü Nash dengesi olabilir. Yani, oyunda çoklu denge olabilir.

(KDES) ile Nash dengesi arasındaki bağlantı iki teorem ile gösterilebilir.

TEOREM 1: (KDES). tekrarlı eleme ile bir denge edilmiş ise; bu denge oyunun tek Nash dengesidir.

TEOREM 2: Her Nash dengesi (KDES)'in tekrarlı elemesi ile vardır (survive).

Bu teoremler zıtlık ile ispatlanabilir. Teoremleri anlamanın anahtarı tanımında yatmaktadır. KDES olmayan bir strateji Nash dengesidir ve Nash dengesinde oynanmayan bir strateji (KDES)'dir.

Nash dengesini göstermenin bir başka yolu da vardır. En iyi cevap fonksiyonu (best response function) strateji kümesi sürekli olduğunda kullanılmaktadır. İki oyunculu bir oyunda 1. Oyuncuyu düşünelim. 2. Oyuncu tarafından seçilmiş her olanaklı strateji için 1. Oyuncunun en iyi cevap fonksiyonunu (BRF) hesaplayabiliriz. Veri bir s_2 stratejisine karşı yapılan en iyi cevap fonksiyonu aşağıdaki problemi çözen s_1 seçimi ile bulunur.

$$\max \ \pi_1(s_1, s_2) \qquad (10) \quad \text{dur.}$$

Sürekli strateji uzayı ve diferansiyeli alınabilir skor fonksiyonu ile, eşitlik (10) çözülebilir. Maksimum için birinci dereceden koşul 1. oyuncunun BRF s_2 nin fonksiyonu olarak tanımlayacaktır. 1. Oyuncu için BRF $R_1(s_2)$ olsun. Aynı şekilde, 2. Oyuncu için BRF $R_2(s_1)$ olacaktır. Nash dengesi için her oyuncunun stratejisi birbirine en iyi cevap olmalıdır. Yani, Nash dengesi strateji çifti (s_1^*, s_2^*) eşanlı çözümdür.

$$s_1^* = R_1(s_2)$$
$$s_2^* = R_2(s_1) \qquad (11) \quad \text{olur.}$$

BR → "En iyi karşılık" denebilir.

2.4. Örnek

İki örnek çözeceğiz. Birincisi, kesiklikli strateji seçimi diğeri sürekli strateji seçimi olacaktır. Birinci örnekte, iki oyuncu bu oyunda üç olanaklı strateji vardır. Oyunun matris biçimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{cc}
 & \text{2. Oyuncu} \\
 & \begin{array}{ccc} L & C & R \end{array} \\
\text{1. Oyuncu} \quad \begin{array}{c} T \\ M \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 3,3 & 2,1 & 3,1 \\ 2,4 & 2,4 & 0,4 \\ 1,5 & 0,2 & 6,5 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Hiçbir oyuncunun KDES'i yoktur. Oyunun çözmek için en iyi cevap yöntemi kullanılacaktır.

1. oyuncunun en iyi cevap fonksiyonunu bulmak için, her sütunu (2. Oyuncunun strateji seçimi) inceleyeceğiz ve en iyi satırı (1. Oyuncunun strateji seçimi) cevabını bulacağız. Aşağıdaki matriste 1. Oyuncunun en iyi cevap fonksiyonunun altı çizilidir.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{2. Oyuncu} \\ & & \begin{array}{ccc} L & C & R \end{array} \\ & \begin{array}{c} T \\ M \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} \underline{3},3 & \underline{2},1 & 3,1 \\ 2,4 & \underline{2},4 & 0,4 \\ 1,5 & 0,2 & \underline{6},5 \end{bmatrix} \\ \text{1. Oyuncu} & & \end{array}$$

2. Oyuncu *L* seçerse *T*; *C* seçerse hem *T* hem *M* ve *R* seçerse *B* en iyi cevaptır.

Görüldüğü gibi 2. Oyuncunun *C* stratejisine 1. Oyuncu 2 adet strateji ile karşılık vermektedir.

Aynı yöntemle 2. Oyuncunun en iyi cevaplarını bulabiliri. Her satırda (1. Oyuncunun seçimi) en iyi cevapları gösterirsek,

$$\begin{array}{ccc} & & \text{2. Oyuncu} \\ & & \begin{array}{ccc} L & C & R \end{array} \\ & \begin{array}{c} T \\ M \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} \underline{3},\underline{3} & \underline{2},1 & 3,1 \\ 2,\underline{4} & \underline{2},\underline{4} & 0,\underline{4} \\ 1,5 & 0,2 & \underline{6},\underline{5} \end{bmatrix} \\ \text{1. Oyuncu} & & \end{array}$$

Bu oyunda üç tane Nash dengesi vardır. (*T*, *L*), (*M*, *C*) ve (*B*, *R*) dir. Matris biçiminde yazılmış bir oyunda en iyi cevapların altını çizerek Nash dengesini bulabiliriz.

Şimdi de sürekli stratejiler ile iki-oyunculu örneği inceleyelim. Her oyuncunun strateji kümesi,

$$S_i = \{s_i : s_i \geq 0\} \qquad (12) \qquad \text{olsun.}$$

Sözle ifade edersek, her oyuncu strateji değişkeninin negatif-olmayan bir düzeyini seçmek zorundadır. İktisatta sıkça karşılaşılan bir durumdur. Örneğin, miktar, fiyat tüketim seçimleri negatif değerler almaz.

1. Oyuncu ve 2. Oyuncu için skor fonksiyonlarını tanımlayalım:

$$\Pi_1 = 10s_1 - s_1^2 - s_2 s_1 - 3s_1$$

ve (13) olsun.

$$\Pi_2 = 10s_2 - s_2^2 - s_2 s_1 - 2s_1$$

Oyun sürekli strateji kümesi ile oynandığından kesikli skor matrisini oluşturmak olanaklı değildir. Bunun yerine en iyi cevap fonksiyonları için çözeriz ve Nash dengesini elde ederiz. Birinci dereceden koşullar,

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial s_1} = 10 - 2s_1 - s_2 - 3 = 0$$

ve (14) dür.

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial s_2} = 10 - 2s_2 - s_1 - 2 = 0$$

Buradan,

$$s_1 = \frac{7 - s_2}{2} \quad \text{ve} \quad s_2 = \frac{8 - s_1}{2} \qquad (15) \quad \text{bulunur.}$$

Eşanlı çözersek, $s_1^* = 2$ ve $s_2^* = 3$ olarak bulunur.

2.5. Karma Stratejilere Giriş

Bütün oyunlarda pür-Nash dengesi yoktur. Nash dengesinde, pür stratejinin seçilme olasılığı 1'dir. Çeşitli iktisadi uygulamalarda karma stratejiler vardır. Bu bölümde iki oyunculu oyunu inceleyeceğiz.

İki oyunculu bir oyunda her oyuncunun *m* olanaklı pür stratejisi vardır. Stratejilerin sayısı aynı olabilir. s_{ij} *i* oyuncusunun *j*. stratejisi olsun. Bu stratejiyi oynamanın olasılığı p_j olsun. İki oyunculu durumda

q_k k stratejisini oynama olasılığı olsun. p ve q olasılık vektörlerini göstersin. Oyuncu 1 ve 2 için karma strateji kümesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$S_1 = \{p : 0 \leq p \leq 1, \sum_{j=1}^{m} p = 1\} \quad (16) \text{ olur.}$$

$$S_2 = \{q : 0 \leq q \leq 1, \sum_{k=1}^{m} q = 1\}$$

Pür stratejiler karma stratejiler kümesinin bir altkümesidir. s_{1j} pür stratejisi 1. Oyuncu için $p_j = 1$ ve $p_i = 0$ ifadelerinde karma strateji seçimi ile eşdeğerdir.

Karma strateji Nash dengesini karakterize etmek için, oyuncuların skorlarının beklenen değerini hesaplamak gerekmektedir. Π_{ijk} i. oyuncunun 1. Oyuncu j pür stratejisini ve 2. Oyuncu k pür stratejisini seçtiğindeki skoru olsun. i oyuncusu için beklenen skor "olanaklı bütün çıktılarda" skorlar çarpı olasılıklardır. Buradan,

$$\begin{aligned} E(\Pi_1) = {} & p_1 q_1 \Pi_{111} + p_1 q_2 \Pi_{112} + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_1 q_m \Pi_{11m} + \\ & p_2 q_1 \Pi_{121} + p_2 q_2 \Pi_{122} + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_2 q_m \Pi_{12m} + \\ & . \\ & . \\ & p_m q_1 \Pi_{1m1} + p_m q_2 \Pi_{1m2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_m q_m \Pi_{1mm} \quad (17) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Böylece,

$$E(\Pi_1) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} p_j p_k \Pi_{1jk} \quad (18) \quad \text{yazılır.}$$

TANIM 3: Karma Strateji Nash Dengesi. p^* ve q^* olasılık vektörleri bütün olanaklı p' ve q' karma stratejileri için aşağıdaki ifade sağlanıyorsa bir Nash dengesidir;

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} p*_j \; p*_k \; \Pi_{1jk} \;\geq \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} p'_j p'_k \Pi_{1jk}$$

ve

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} p*_j \; p*_k \; \Pi_{2jk} \;\geq\; \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} p'_j p'_k \Pi_{2jk}$$

TEOREM 3: Her sonlu pür stratejili n–oyunculu oyunun en azından bir pür ya da karma stratejili Nash dengesi vardır.

Bu teorem her oyunun bir sonucu olduğunu söylemektedir. Ancak, teorem sonucun nasıl bulunacağını söylemektedir. İki oyunculu, iki stratejili oyunlarda karma strateji çözümünü bulmak kolaydır. Aşağıdaki oyunu düşünelim.

2. Oyuncu

1.Oyuncu
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} A,a & B,b \\ C,c & D,d \end{bmatrix} \end{array}$$
(19) olsun.

Oyunda *T* stratejisi *p* olasılığı ile oynandığında, ikinci strateji (1 – *p*) olasılıkla oynanacaktır. Böylece 1. oyuncunun beklenen skoru,

$$E(\Pi_1) = pqA + p(1-q)B + (1-p)qC + (1-p)(1-q)D \qquad (20)$$

olur.

Veri *q* için, 1. Oyuncunun skoru *p* olasılığının doğrusal fonksiyonudur. *p* seçimini düşünelim. 1. Oyuncunun skor fonksiyonunun türevi alındığında;

$$\frac{\partial E(\Pi_1)}{\partial p} = qA + (1-q)B - qC - (1-q)D \qquad (21)$$ bulunur.

Birinci-dereceden koşulda, p ile ilgili bir değişken yoktur. Türev q olasılığına bağlı olduğundan, 1. Oyuncu türevin değerini seçemez. Değer pozitif, negatif ve sıfır olabilir. Pozitif ise oyuncu p=1 olarak alacaktır. Negatif ise, p=0 ve sıfır ise, p olasılığının olanaklı bütün düzeyleri için 1. oyuncunun skoru aynı olacaktır. Yani, oyuncu olanaklı bütün stratejiler arasında farksızdır: Herhangi bir karma strateji seçimi (pür stratejileri de kapsayan) aynı skorları de içermektedir.

Türev sıfıra eşit olduğunda, 1. Oyuncu için karma strateji oynamak bir denge olabilir.

Dengeyi bulmak için aynı işlem 2. Oyuncu için de uygulandığında,

$$E(\Pi_2) = pa - pb + (1+p)c + (1-p)d \qquad (22) \quad \text{olur.}$$

Denge birinci türevlerin sıfıra eşitlenmesi ile bulunur.

$$\frac{\partial E(\Pi_1)}{\partial p} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial E(\Pi_2)}{\partial q} = 0 \qquad (23) \quad \text{olur.}$$

(21) ve (22) çözüldüğünde,

$$p = \frac{d-c}{a-b-c+d} \text{ ve } q = \frac{D-B}{A-B-C+D} \qquad (24) \quad \text{bulunur.}$$

İki çözüm de 0 ile 1 arasında ise, karma-strateji dengesi vardır. Bir örnekle inceleyelim:

$$\text{1.Oyuncu} \quad \begin{array}{cc} & \text{2. Oyuncu} \\ & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 3,1 & 2,4 \\ 2,2 & 3,1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (25) \text{ olsun.}$$

(25)'de pür strateji Nash dengesi yoktur. Beklenen faydaları yazalım. Buna göre,

$$E(\Pi_1) = 3pq + 2p(1-q) + 2(1-p)q + 3(1-p)(1-q)$$

$= 2pq - p - q + 3$

ve

$$E(\Pi_2) = pq + 4p(1-q) + 2(1-p)q + 1(1-p)(1-q)$$
$$= -4pq + 3p + q + 1$$

Skor fonksiyonunun türevini alırsak,

$$\frac{\partial E(\Pi_1)}{\partial p} = 2q - 1 \text{ ve } \frac{\partial E(\Pi_2)}{\partial q} = 4p + 1 \qquad (26)$$ bulunur.

Sıfıra eşitlersek, $p^* = \frac{1}{4}$ ve $q^* = \frac{1}{2}$ bulunur.

2.6. Dengenin Varlığı

Örnek olarak yazı–tura oyununu verelim.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{2. Oyuncu} \\ & & \begin{array}{cc} \text{Yazı} & \text{Tura} \end{array} \\ \text{1.Oyuncu} & \begin{array}{c} \text{Yazı} \\ \text{Tura} \end{array} & \begin{bmatrix} -1,1 & 1,-1 \\ 1,-1 & -1,1 \end{bmatrix} \end{array}$$ olsun.

1. Oyuncu 2. Oyuncunun q olasılıkla Yazı oynayacağını $(1 - q)$ olasılıkla tura oynayacağına inansın. Yani, karma strateji $(q, 1 - q)$ olacaktır. 1.oyuncunun yazı oynadığında beklenen skoru,

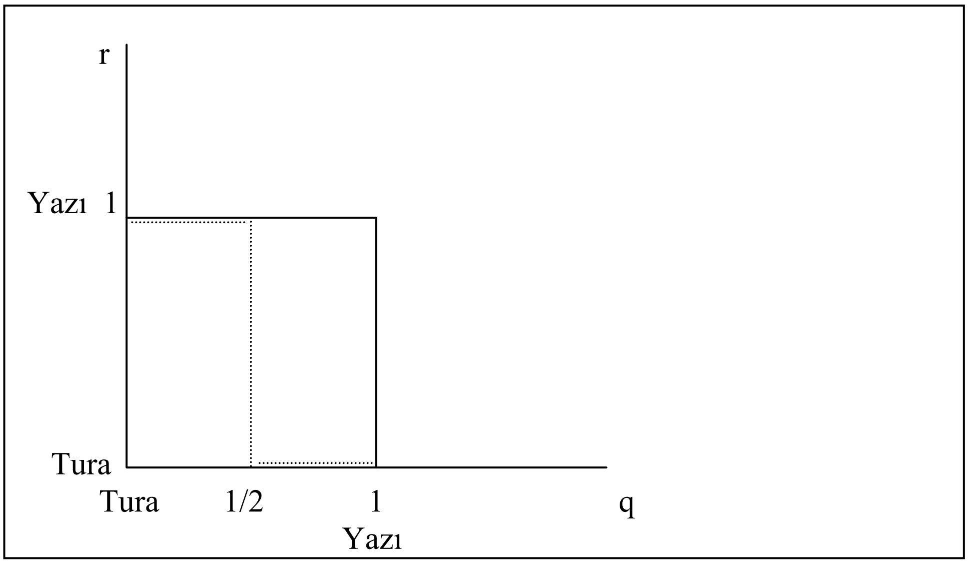
$q(-1)+(1 - q)1 = 1 - 2q$,

tura oynadığında,

$q1 + (1 - q)(-1) = 2q - 1$ olur.

$1 - 2q > 2q - 1$ olduğundan, yalnızca ve yalnızca $q < 1/2$ ise, 1.oyuncunun en iyi pür cevabı yazı $q < 1/2$ için, tura $q > 1/2$ için ve her ikisinde farksız olduğu durum $q = 1/2$ olduğunda gerçekleşecektir.

(r, $1 - r$) 1.oyuncunun karma stratejileri olsun. 0 ile 1 arasında her q değeri için r değerleri hesaplayabiliriz. $r^*(q)$ ile gösterilir. (r, $1 - r$) 1.oyuncu için (q, $1 - q$) çiftine en iyi cevaptır. Sonuç **Şekil 1**'de görülmektedir.



Şekil 1. Yazı–Tura Oyununda Olasılıklar

1. Oyuncunun 2. Oyuncu (q, $1 - q$) olasılıklarını oynadığındaki beklenen skoru,

$rq(-1) + r(1 - q)1 + (1 - r)q1 + (1 - r)(1 - q)(-1) = (2q - 1) + r(2 - 4q)$ dur.

rq, (Yazı, Yazı) gelme olasılığıdır. $r(1 - q)$, (Yazı, Tura) ve diğerleri böylece sıralanmaktadır. 1. Oyuncunun beklenen skoru $(2 - 4q)>0$ olduğunda artan, $(2 - 4q)<0$ olduğunda azalandır. 1. Oyuncunun en iyi cevabı eğer $q < 1/2$ ise, $r = 1$, $q > 1/2$ ise $r = 0$ olacaktır. Görüldüğü gibi iki yatay çizgidir.

Herşey $q = 1/2$ durumunda değişmektedir. Bu durumda oyuncu yazı ve turada farksızdır. $q = 1/2$ olduğunda 1. Oyuncu bütün karma stratejiler arasında farksızdır. Yani, $r^*(1/2)$ ise, [0,1] aralığındadır.

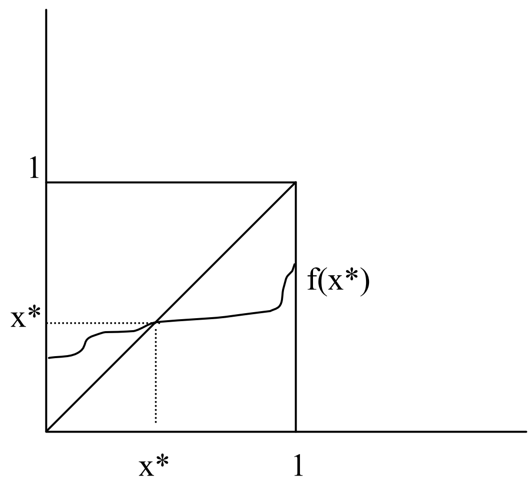
2.6.1. Nash Dengesinin Varlığı

Nash teoremini tekrar yazalım. Buna göre,

TEOREM (Nash (1950)): Nash Dengesi. n–oyunculu normal biçimdeki $G=\{S_1, ..., S_n;\ u_1, ..., u_n\}$ oyunda, her i için, n sonlu ve S_i sonlu ise, karma stratejilerinde dahil olduğu en az bir Nash dengesi vardır.

Bu teoremin ispatı için sabit nokta teoremi gerekmektedir. Basit bir örnek verirsek, $f(x)$, [0,1] aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman Brouwer sabit nokta teoremine göre en az bir tane sabit nokta vardır – yani [0,1] aralığında $f(x^*) = x^*$ olan bir x^* değeri vardır. **Şekil 2**'de bir örnek görülmektedir.

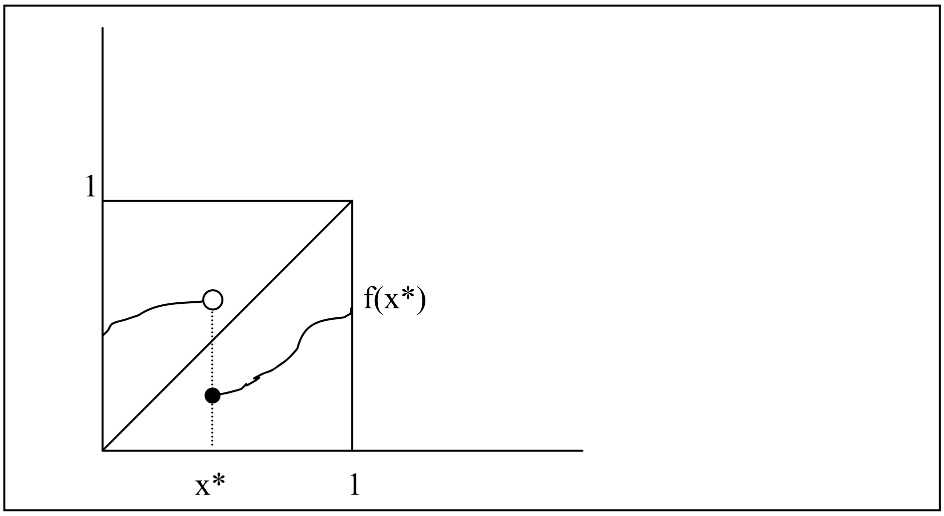
Sabit nokta teoremini Nash dengesine uygulamanın iki adımı söz konusudur: (1) belirli bir karşılamanın (correspondence) herhangi bir sabit noktasının Nash dengesi olduğunu gösterme, (2) bu karşılamanın bir sabit noktası olması gereğini uygun bir sabit nokta teoremi ile göstermedir. İlgili karşılama n–oyuncu en iyi cevap karşılamasıdır. Kakutani sabit nokta teoremi kolaylıkla uygulanabilir.



Şekil 2. Sabit Nokta

n–oyunculu en iyi cevap karşılamasını (C) hesaplayalım. Karma stratejilerin (p_1, ..., p_n) keyfi bir kombinasyonunu alalım. Her i oyuncusu için, i'nin en iyi cevabını diğerlerinin karma stratejilerine (p_1,..., p_{i-1}, p_{i+1},..., p_n) göre türetelim. Her oyuncu için, en iyi cevapları oluşturalım. (p_1*, ..., p_n*) karma stratejilerinin bir kombinasyonu oyuncuların olanaklı kombinasyonlar kümesine dahil ise, bu C karşılamasının bir sabit noktasıdır. Yani, her i için, p_i*, i oyuncusunun (p_1,..., p_{i-1}, p_{i+1},..., p_n)'e en iyi cevabı olmak zorundadır. Böylece, (p_1*, ..., p_n*) Nash dengesidir.

İkinci adım her oyuncunun en iyi cevap karşılamasının sürekli olmasına dayalıdır. Süreklilik sabit nokta teoremi için gereklidir. **Şekil 3**'de süreksiz bir fonksiyonda sabit noktanın olmadığı görülmektedir.



Şekil 3. Süreksiz Fonksiyon Durumu

3. Tam Haberalma ile Dinamik Oyunlar

Şimdiye kadar oyuncular stratejileri aynı anda seçtiğinden statik bir durum analiz edilmektedir. Ardışık olarak oyuncuların hareket etmesi dinamik oyunların ortaya çıkmasına neden olmuştur.

Statik oyun teorisinde oyunların sunuşu normal biçim kullanılarak yapılmıştır. Normal biçim skor matrisi (kesikli strateji uzayı) ya da en iyi cevap fonksiyonu (sürekli stratejiler uzayı) ile gösterilebilir.

Dinamik oyunlar ise genel biçimde (extensive form) ya da oyun ağacı biçiminde gösterilmektedir. Oyunların arasındaki fark sunuş yönteminin altında yatmaktadır. Kullanılan çözüm yöntemleri farklıdır.

3.1. Genişleyen Biçimdeki Oyunlar

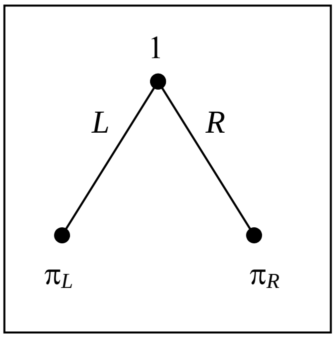
Oyuncular 0, ..., *n* olarak tanımlanmaktadır. Oyuncu 0 doğadır. Diğer *n* oyuncu karar alıcılardır. Doğa raslantısal olayların modellenmesinde uygunluk açısından oyuncu olarak kabul edilmektedir.

TANIM 4: Genel Biçim.

a) oyuncuların kümesini
b) hareketlerin düzenini
c) her harekette bir oyuncunun olanaklı eylemleri ve hareketler için olanaklı eylemler üzerine olasılık dağılımının atanmasını
d) bir oyuncunun her hareketteki bilgiyi ve
e) her olanaklı hareketlerin kombinasyonu için oyuncuların skorlarını göstermektedir.

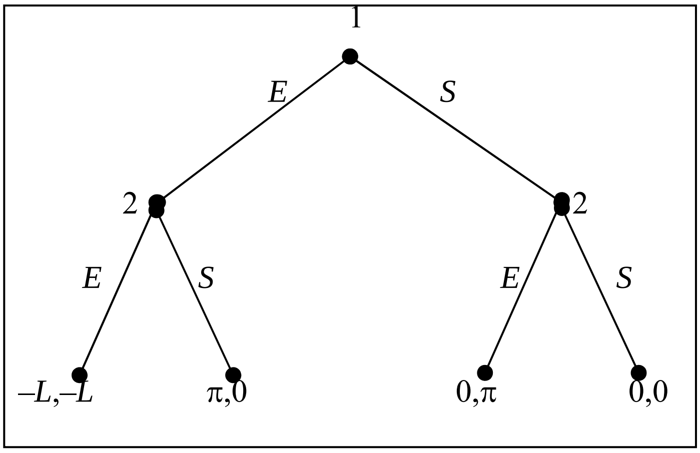
Dinamik oyunlarda da şu ayrım yapılabilir. Kesikli seçimli oyunlar genişleyen biçimde; en iyi cevap fonksiyonları sürekli-seçimli oyunlarda kullanılmaktadır.

3.1.1. Oyun Ağacına Giriş



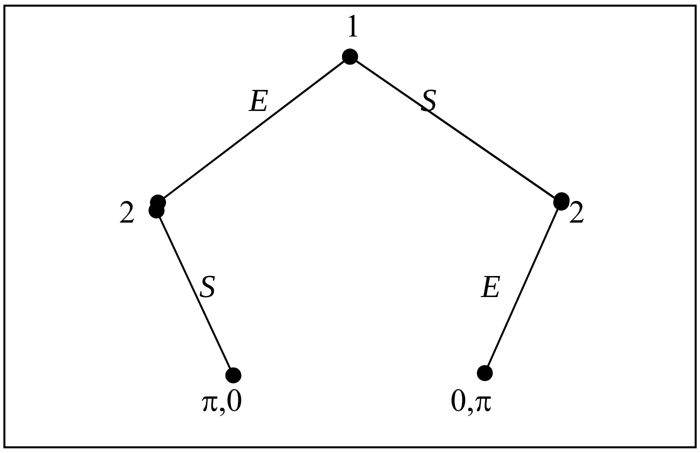
Şekil 4. Bir–Oyunculu Oyun Ağacı

Öncelikle en basit örneği inceleyelim. Bir oyunculu oyunda, iki seçim olsun. Oyun ağacı doğrularla gösterilmektedir. Nodeları gösteren doğrular aslında çıktılara ya da karar noktalarına giden yolu belirtmektedir. **Şekil 4** 1 oyunculu oyun ağacını göstermektedir. İki olanaklı seçim vardır: sol (*L*) ve sağ (*R*). Başlangıç noktası 1 ile gösterilmektedir. Oyuncu için karar noktasıdır. Doğrularla gösterilen (*L*) ve (*R*) oyuncu için alternatiflerdir. Aşağıdaki noktalar terminal noktalar olarak adlandırılmaktadır ve çıktıları π_L ve π_R ile göstermektedir. Bu oyundaki denge daha yüksek skorun oyuncu tarafından seçilmesi ile bulunmaktadır.



Şekil 5. Yatırım Oyunu

Aynı yöntemle iki oyunculu oyunlar şekillenebilir. Bir yatırım kararı oyununu düşünelim. Her iki firmada piyasaya giriş için yatırım yapma kararını alsın. Firma piyasaya girmeyerek sıfır kar elde edecektir. Seçimler ardışıktır. Firma 1 kararını almakta, ve birinci olarak işlem yapmaktadır. Daha sonra Firma 2 Firma 1'in ne yaptığını öğrenmekte ve yatırım kararını almaktadır. **Şekil 5** bu oyunun ağacını göstermektedir. *E* piyasaya giriş ve *S* piyasaya girmemektir. π firmanın karını $-L$ zararını belirtmektedir. İlk sayı 1. firmanın skoru, 2. sayı diğer firmanın skorudir.



Şekil 6. Kısaltılmış Oyun Ağacı

Bu oyun nasıl çözülecektir? Bir denge bulmak için gerisel tümevarım (backward induction) tekniği kullanılmaktadır:

1) Oyunda en son karar noktası incelenir.
2) Oynanmayan eylem elenir.
3) Bu eylemler silinir.
4) Oyun ağacı tekrar çizilir.
5) Süreç tekrarlanır.

Örneğimizde son karar noktaları 2. Firmamızındır. Oyun ağacının sol tarafında (1. Firmanın piyasaya girdiği taraf) 2. Firmanın en iyi cevabı ($-L<0$ olduğundan) piyasaya girmemektir. Sağ tarafta ($\pi > 0$ olduğundan) 2. Firmanın optimal seçimi piyasaya girmektir. **Şekil 6** 2. Firmanın domine edilmiş eylemleri olmaksızın kısaltılmış oyun ağacını göstermektedir.

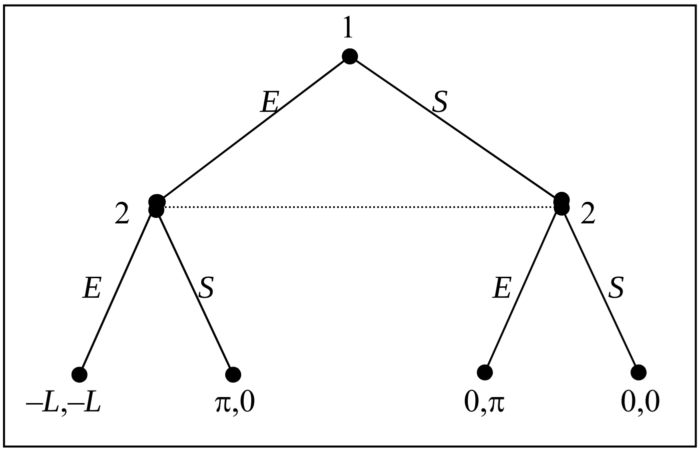
Şimdi oyunu çözmek kolaydır. İki oyuncunun da rasyonel olduğunu ve bu rasyonelliğin ortak bilgi olduğunu varsayacağız. 1. Firma 2. Firmanın rasyonel seçimini tahmin ederek, 2. Firmanın piyasaya girmediğinden piyasaya girişten karlar elde edecektir. Böylece, denge 1. Firmanın piyasaya girip kar elde etmesidir.

3.1.2. Haberalma Kümesi

Son örneğimizde 2. Firma kararını vermeden evvel 1. Firmanın seçimini bilmektedir. Fakat 2. Firma bu kararı bilmeseydi ne olurdu? Eşanlı karar oyunlarında oyun ağacı çizmek için haberalma kümesine ihtiyacımız vardır.

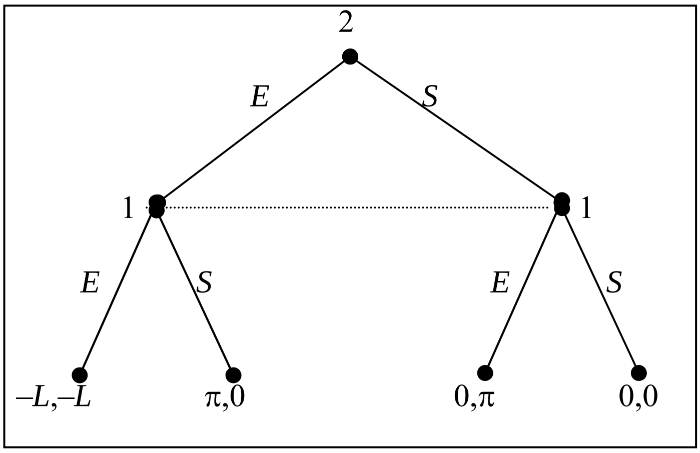
> **TANIM 5**: Haberalma Kümesi. Bir haberalma kümesi bir oyuncu için karar noktalarının bir koleksiyonudur. (Bu noktalara karşılık gelen hareketlerde) Bu kümede oyuncu tarafından hangi noktanın oyunun sonucuna ulaşacağının bilinemediği hareketlerin olmasıdır.

Şekil 7 giriş oyununun eşanlı versiyonudur. Bu genel biçimde kusurlu haberalmalı statik bir oyundur. Noktalı doğru 2. Firmanın haberalma kümesini belirtmektedir. Yani, noktalı doğru 2. Firmanın girip girmeme seçimini bilmekte, 1. Firmanın ne seçtiğini bilmemektedir.



Şekil 7. Eşanlı Durum

Şekil 8, bu oyunun farklı bir sunumudur. 2. Firma ilk hareket etmekte ve 1. Firma 2. Firmanın hareketini görmemektedir.



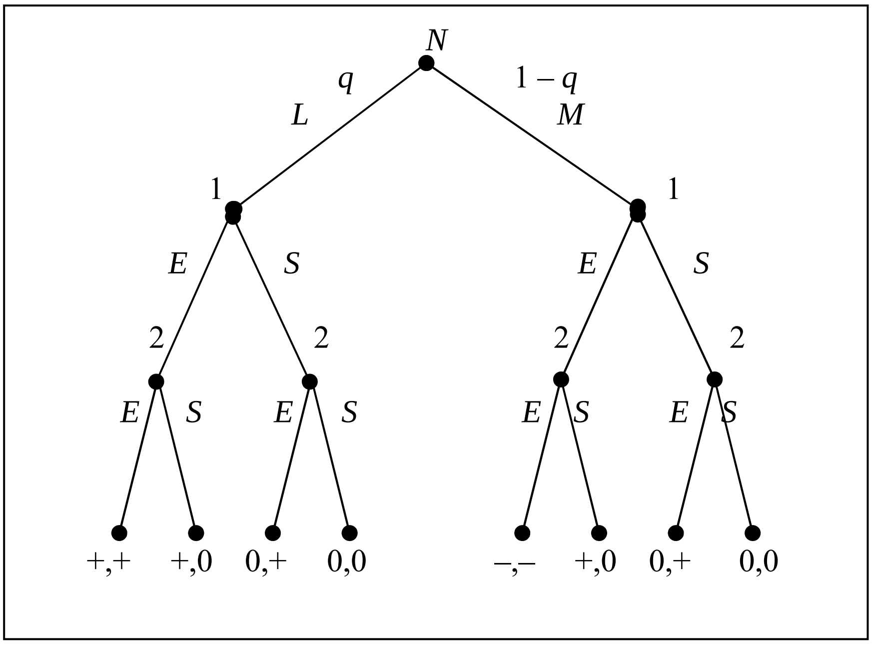
Şekil 8. Ters Durum

3.1.3. Belirsizlik ve Doğanın Hareketi

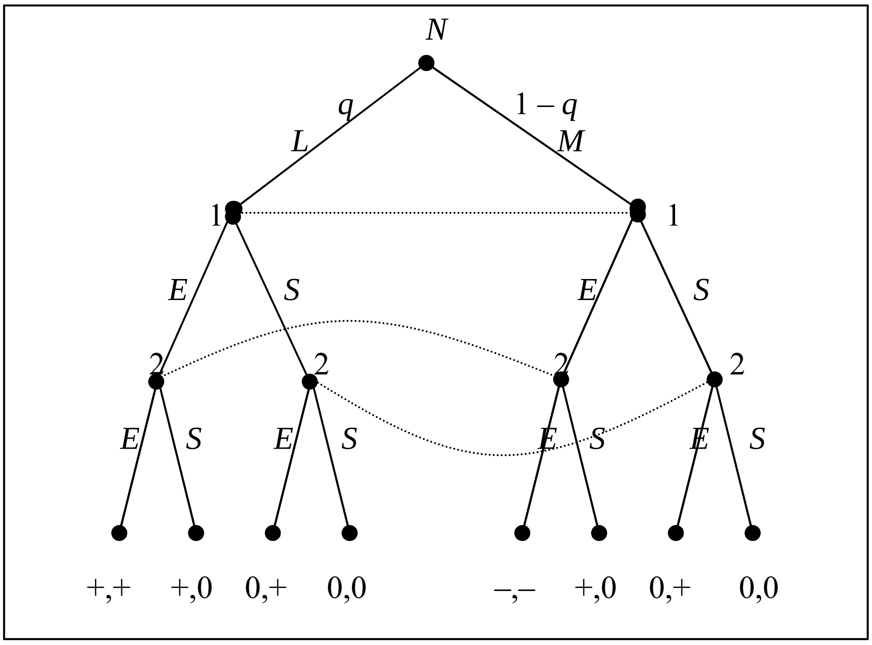
Potansiyel tüketici talebi hakkında belirsizlik olsun. Basitlik için, büyük (*L*) ve küçük (*S*) piyasa büyüklüğü olsun. *L* olduğunda iki firma piyasaya girip kar elde etmektedirler. *S* olduğunda sadece bir firma kar elde edecektir. q, *L* olma olasılığı olsun. $(1–q)$ da S olma olasılığı olacaktır.

Şekil 6'dan 9'a kadar dört olanaklı sunum gösterilmektedir. İlk ikisi ardışıktır. (1.firma hareket etmekte ve kararını açıklamaktadır). Son ikisi eşanlıdır. + ve – işaretleri kolaylaştırmak amacıyla kullanılmıştır. **Şekil 9**'daki oyunda,

(1) doğa (*N*) rastlantısal olarak piyasa büyüklüğüne karar vermektedir.
(2) Firmalar piyasa büyüklüğünü öğrenmektedir.
(3) 1.firma piyasaya girmekte (*E*) veya girmemektedir (*S*).
(4) 2.firma bu kararı öğrenmekte ve piyasaya girmekte (*E*) veya girmemektedir (*S*).

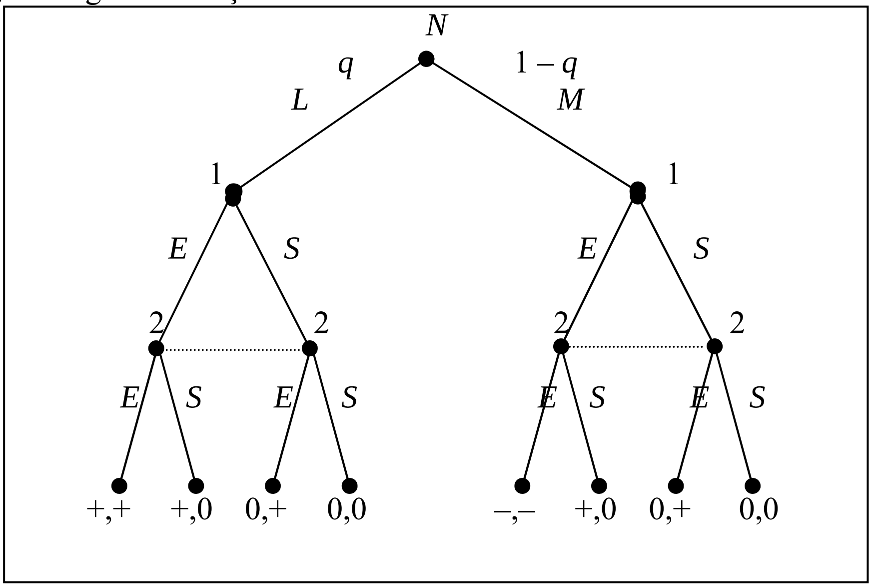


Şekil 9. Rastlantısal (Bilinen) Talep

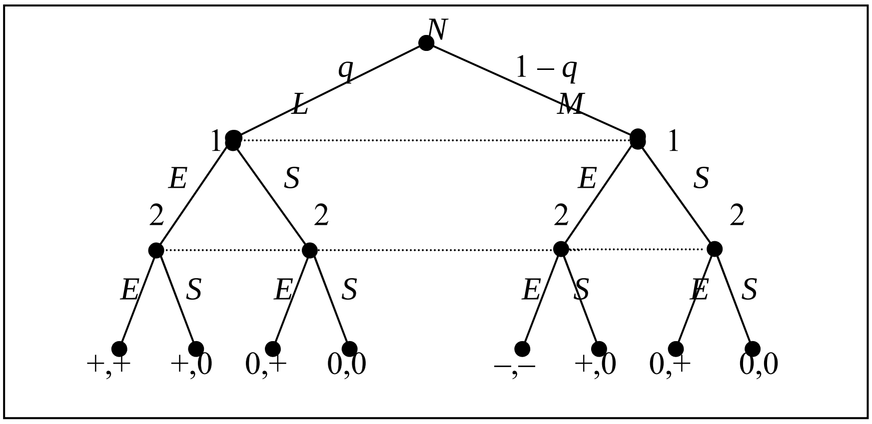


Şekil 10. Rastlantısal (Bilinmeyen) Talep

Şekil 10'deki firmaların seçimleri ardışıktır. Ancak, firmalar fiili piyasa büyüklüğünü önemsemeyerek seçim yapmaktadır. Böylece 1. Firmanın her iki noktası bir haberalma kümesi iken, 2. Firmanın iki haberalma kümesi vardır. 2. Firma 1. Firmanın piyasaya girdiğini öğrendiğinde bir tane haberalma kümesi vardır. Fakat piyasa büyüklüğünü bilmemektedir. İkinci haberalma kümesi 1.Firmanın piyasaya girmediği anda oluşmaktadır.



Şekil 11. Eşanlı Hareket ve Bilinen Talep



Şekil 12. Eşanlı Hareket ve Bilinmeyen Talep

Şekil 11 ve 12'da eşanlı hareket oyunudur. **Şekil 11**'de talep bilinmekte, **şekil 12**'da bilinmemektedir.

3.2. Genişleyen Biçimdeki Oyunlarda Denge

Dinamik oyunlarda da Nash dengesi vardır. Nash dengesi zayıf olduğundan dinamik oyunları çözmede Nash dengesi kavramı kullanılamaz. Bazı Nash dengeleri mantıksızdır. Bu noktada mantıklı ve mantıksız Nash dengelerini ayırmak için altoyun kavramı tanımlanmalıdır.

3.2.1. Altoyunlar

Altoyun bir oyunun içinde bir oyundur. Tanımlanırsa,

TANIM 6: Altoyunlar Altoyun bir oyunun bir kısmıdır,

a) uygun haberalma kümesi olan ve bir noktada başlayan
b) başlangıç noktasından sonra bütün noktaları ve dalları içeren
c) orijinal oyunun herhangi bir haberalma kümesini kesmeyendir.

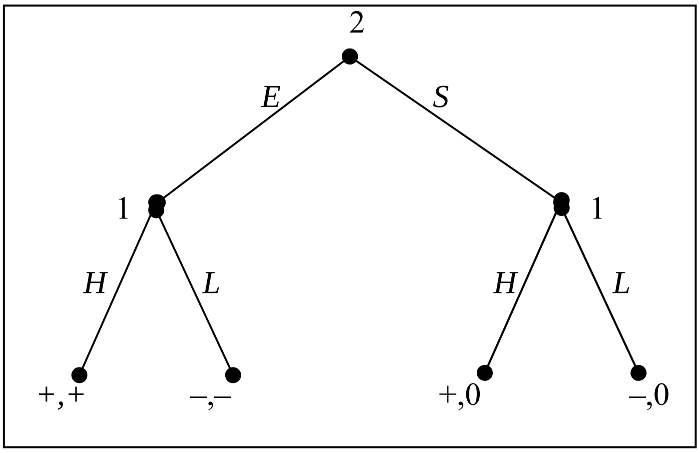
Bu kavram bir önceki örneğe uygulanabilir. Tanım gereği, bütün oyunların bir altoyunu vardır – kendisi. Örneklerdeki altoyunları sayalım. **Şekil 6'da** altı tane altoyun vardır. **Şekil 8'de** iki tane altoyun vardır. **Şekil 7 ve 9'da** uygun karar noktası olmadığından altoyun yoktur.

3.2.2. Stratejiler

Eşanlı oyunlarda bir strateji bir eylemdir. Örneğin, Cournot duopolü oyununda firmanın stratejisi çıktı düzeyini seçmesidir. Dinamik oyunlarda, oyuncular basitçe eyleme geçmezler: tekrar tekrar eylemde bulunmaktadırlar. Bundan başka oyunda oluşabilecek bütün durumlar için nasıl tekrar eylemde bulunacaklarını planlamaktadırlar. Bu gerçekler ışığında genişleyen biçimdeki bir oyun için bir strateji tanımlanabilir.

TANIM 7: Genişleyen biçimdeki Bir Oyunda Bir Strateji. Bu strateji oyundaki bütün karar noktalarında oluşan eylemlerin koleksiyonunun bir planıdır. Böyle bir plan oyunun geçmişine bağlı olup karma stratejileri de kapsayabilir.

Farklı bir giriş oyunu ile strateji kavramını inceleyelim. 1. Firma piyasada olsun ve 2. Firma piyasaya girip girmeme kararını alsın. 2. Firmanın piyasaya giriş kararına göre, 1. Firma fiyat stratejisi seçsin. Yüksek fiyat (*H*), düşük fiyat (*L*). *H* durumunda pozitif, *L* durumunda negatif kar söz konusudur. 2. Firma piyasaya girmezse sıfır kar elde edecektir.



Şekil 13. Giriş Oyunu

2. Firmanın bir karar noktası ve iki olanaklı eylemi vardır. (*E*) ve (*S*). 1. Firmanın iki olanaklı eylemi ancak iki karar noktası vardır. Buna göre, dört olanaklı stratejisi (iki nokta çarpı iki eylem) vardır. 1. Firmanın stratejisi koşullu eylemler çiftidir. Birinci eleman 2. Firma girdiğindeki eylemi, ikinci eleman 2. Firma girmediğindeki eylemleri belirtmektedir. 1. Firmanın olanaklı stratejiler kümesi,

$S_1 = \{(H,H), (H,L), (L,H), (L,L)\}$ dır.

3.2.3. Altoyun–Kusursuz Nash Dengeleri

Nash dengesini bulmak için, önceki örneği normal biçimde gösterelim. Altı çizili oyuncuların en iyi cevaplarıdır. Buna göre;

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{2. Oyuncu} \\
 & & \begin{array}{cc} \quad E \quad & \quad S \quad \end{array} \\
\text{1. Oyuncu} & \begin{array}{c} H,H \\ H,L \\ L,H \\ L,L \end{array} & \begin{bmatrix} \underline{\pm},\underline{\pm} & \underline{\pm},0 \\ \underline{\pm},\underline{\pm} & -,0 \\ -,- & \underline{\pm},\underline{0} \\ -,- & -,\underline{0} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Çift altı çizili skorlar Nash dengesidir. Buna göre Nash dengeleri,

	Firma 2	Firma 1
E1	(*H*,*H*)	E
E2	(*H*,*L*)	E
E3	(*L*,*H*)	S

Görüldüğü gibi, üç Nash dengesi vardır. Ancak E2 ve E3 dengeleri problemlidir. **Şekil 13'de** bu durumu inceleyelim. Sol taraftaki noktada, 2. Firma girdiğinde, 1. Firma için *H* en iyi altoyun eylemidir. Aynı şekilde 2. Firma girmediğinde de *H* en iyi altoyun eylemidir. *H* eylemi her iki altoyun için de egemendir.

L ile ilgili problem domine edilmiş eylemin oynanması ile ilgilidir. E2 ve E3 dengeleri kredibilitesi olmayan eylemleri barındırmaktadırlar.

TANIM 8: <u>Altoyun–Kusursuz Nash Dengesi</u>. Genişleyen biçimdeki bir oyunda stratejiler kümesi yalnızca ve yalnızca bu stratejilerle oluşmuş eylemler bütün altoyunlarda Nash dengesi oluşturuyorsa altoyun–kusursuz Nash dengesidir.

Nash dengesi statik, altoyun–kusursuz Nash dengesi dinamik oyunlar için kullanılmaktadır. Gerisel tümevarım yöntemi ve altoyun–kusursuz Nash dengesi kusursuz haberalmalı oyunlarda aynıdır. Yani, gerisel tümevarım ile bulunan denge altoyun–kusursuz Nash dengesidir. Herhangi bir altoyun–kusursuz Nash dengesi gerisel tümevarım argumanını taşımaktadır. Altoyun kusursuzlaşması daha geneldir. Kusurlu haberalmalı oyunlara da uygulanabilir ancak gerisel tümevarım argumanı kullanılamaz.

3.2.4. Örnek

Şimdiye kadar kesikli eylemli ve strateji uzaylı oyunları inceledik. Şimdi sürekli seçim değişkenli iki oyunculu bir oyunu örnek vereceğiz. Oyunun yapısı basittir.

(1) 1. Oyuncu x_1 eylemini seçer,

(2) 2. Oyuncu seçimi gözlemler ve x_2 eylemini seçer.

(3) Oyuncular $\Pi_1(x_1, x_2)$ ve $\Pi_2(x_1, x_2)$ fonksiyonları ile tanımlı skorları elde ederler.

Bu oyunu çözmek için, 2. Oyuncunun oynadığı altoyunla başlayalım. 2. Oyuncunun birinci–dereceden koşulu;

$$\frac{\Pi_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \qquad (27) \quad \text{dir.}$$

2. Oyuncunun x_1 değişkenine en iyi cevabı olarak,

$$x_2^* = R_2(x_1) \qquad (28) \quad \text{yazılır.}$$

Altoyunda 2. Oyuncunun stratejisi için, 1. Oyuncunun kararını inceleyelim. Ortak rasyonellikten hareketle, 1. Oyuncunun skoru,

$$\Pi_1 = \Pi_1(x_1, R_2(x_1)) \qquad (29) \quad \text{olacaktır.}$$

1. Oyuncunun en iyi cevabı için,

$$\frac{\partial \Pi_1(x_1, R_2(x_1))}{\partial x_1} = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2}\frac{\partial R_2}{\partial x_1} = 0 \qquad (30) \quad \text{dur.}$$

Eşitlik (30)'da hem direk hem de indirek etkiler vardır. Indirek etki, x_1'deki değişimin x_2 seçimini değiştirmesinden böylelikle Π_1 değişimini etkilemesinden doğmak-tadır. Stratejik etki statik ile dinamik oyun dengesi arasındaki farktır.

Sayısal bir örnek ile bu farkı inceleyelim.

$$\Pi_1 = 10x_1 - x_1^2 - x_2x_1 - 3x_1$$

(31) olsun.

$$\Pi_2 = 10x_2 - x_2^2 - x_1x_2 - 2x_2$$

Statik oyunda en iyi cevaplar,

$$x_1^* = R_1(x_2) = \frac{1}{2}(7 - x_2) \text{ ve } x_2^* = R_2(x_1) = \frac{1}{2}(8 - x_1) \qquad (32) \text{ olur.}$$

Eşanlı çözersek, statik denge,

$$x_1^* = 2;\ \Pi_1 = 4 \qquad \text{ve} \qquad x_2^* = 3;\ \Pi_2 = 9 \quad (33) \text{ bulunur.}$$

Şimdi ilk olarak 1. Oyuncunun hareket ettiği dinamik oyunu düşünelim. Eşitlik (32)'deki en iyi cevapla birinci oyuncunun skorunde yerine koyarsak,

$$\Pi_1 = \Pi_1(x_1, R_2(x_1)) =$$

$$10x_1 - x_1^2 - \frac{1}{2}(8 - x_1) - 3x_1 = 3x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 \qquad (34) \quad \text{olur.}$$

Birinci-dereceden koşullar,

$$\frac{\partial \Pi_1(x_1, R_2(x_1))}{\partial x_1} = 3 - x_1 = 0 \qquad (35)\text{dir.}$$

Eşitlik (35)'i çözüp, 2. Oyuncunun cevap fonksiyonunda yerine koyarsak; ve sonuçları skor fonksiyonlarına geçirsek, dinamik oyunun dengesi,

$x_1^* = 3;\ \Pi_1 = 4.5$ ve $x_2^* = 2.5;\ \Pi_2 = 6{,}25$ (36) bulunur.

Görüldüğü gibi, dinamik oyunda 1. Oyuncu ilk hareket eden avantajından yararlanmıştır. Ancak, her ilk hareket eden avantajlıdır diye bir durum söz konusu değildir. Genellikle oyunun yapısı skorlarda değişime bağlı olduğundan dolayı hareket sırasına göre de avantajlar değişmektedir.

3.3. İki Safhalı Oyunlar

İki safhalı oyunlar oyunların birbirini takip ettiği durumları içeren oyunlardır. Birçok iktisadi uygulamada, birinci oyun çevreyi (ikinci oyunun oynandığı) tanımlamaktadır. Örneğin, birinci oyun firmaların ürün kalitesini (ya da üretim kapasitesini) seçtiği, ikinci safha ise, fiyatı seçtikleri oyunlar olabilir. İlk safha seçimi ikinci safha fiyatlandırma kararının kar sonuçlarını belirleyecektir.

Bu bölümdeki analizler oyunların eşanlı olduğu ancak ardışık geldiği durumlara odaklanacaktır. Sürekli eylem uzayını varsayacağız. Birinci safhada 1. ve 2.oyuncu x_1 ve x_2 eylemini eşanlı seçmektedir. 3. ve 4.oyuncu bu seçimi gözlemleyip ikinci safhada x_3 ve x_4 eylemlerini eşanlı seçmektedirler. Böylece,

$\Pi_3 = \Pi_3\ (x_1, x_2, x_3, x_4))$ ve $\Pi_4 = \Pi_4\ (x_1, x_2, x_3, x_4))$ (37) dir.

Birinci-dereceden koşullar

$\dfrac{\partial \Pi_3}{\partial x_3} = 0$ ve $\dfrac{\partial \Pi_4}{\partial x_4} = 0$ (38) olur.

Eşanlı çözüm ile ikinci safha dengesi birinci safha eylemine koşullu bir fonksiyon olacaktır.

$x_3^* = R_3(x_1, x_2)$ ve $x_4^* = R_4(x_1, x_2)$ (39) yazılır.

Eşitlik (39)'da bulunan ikinci safhadaki oyuncuların stratejileridir. Burada 1. ve 2.oyuncuların da optimal stratejilerini bulmak gerekmektedir. Buna göre; skorlar;

$$\Pi_3 = \Pi_3 \; (x_1, x_2, R_3(x_1, x_2), R_4(x_1, x_2))$$

ve (40) olur.

$$\Pi_4 = \Pi_4 \; (x_1, x_2, R_3(x_1, x_2), R_4(x_1, x_2))$$

Birinci-dereceden koşullar;

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_3}\frac{\partial R_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_4}\frac{\partial R_4}{\partial x_1} = 0$$

(41) dir.

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} = \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_3}\frac{\partial R_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_4}\frac{\partial R_4}{\partial x_2} = 0$$

İlk safha dengesi (x_1^*, x_2*) strateji çiftinin birinci dereceden koşulların eşanlı çözülmesi ile bulunmaktadır. Oyunun bütün çözümü altoyun Nash dengesidir ve dört oyuncunun da birinci-dereceden koşulları sağlamaktadır. Bu denge,

$E = \{x_1^*, x_2^*, x_3^* = R_3(x_1, x_2), x_4^* = R_4(x_1, x_2)\}$ (42) bulunur.

3.4. Tekrarlı Oyunlar

Tekrarlı oyunlar da dinamik oyunların önemli bir tipidir. Mahkumlar çıkmazı veya Cournot oligopol modeli incelenebilir. Bu modellerde oyuncular statik oyunda bir kere eyleme geçmektedirler. Ancak birçok iktisadi uygulamada oyuncular belirli bir zaman periyodunda oynarlar. Ardışık zaman periyotlarında oyun tekrarlanır. Yani, dinamik oyun statik oyunun tekrarlı durumlarından oluşmaktadır.

Bu tekrar önemli midir? Tekrarlı oyunun dengesi statik dengenin bir tekrarı mıdır?

Tekrarlama tehdit ve söz olanağı olarak görülebilir. Örneğin, statik mahkumlar çıkmazında her oyuncu iki strateji arasında seçim yapmaktadır; işbirliği ya da inkar. Tekrarlı mahkumlar çıkmazında strateji uzayı daha karmaşık bir hal almaktadır. Bir oyuncu diğer oyuncunun geçmiş eylemleri üzerine koşullu eylemler oluşturmaktadır. Bir oyuncu oyunun geçmişinde diğer oyuncular işbirliği yapmışsa işbirliği için söz verebilir ya da geçmişte inkar edilmişse, inkar tehdidi verilebilir. Altoyun kusurlaştırması tekrarlı oyunların dengesini tanımlamada önemlidir.

G statik bir oyun olsun. *G*(*T*), *G* oyununun *T* kere tekrarlanmasıyla oluşan bir dinamik oyundur. Oyunun skorları

$$\text{1. Oyuncu} \quad \begin{array}{cc} & \text{2. Oyuncu} \\ & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} R,R & L,W \\ W,L & P,P \end{bmatrix} \end{array} \qquad (43) \quad \text{olsun.}$$

C işbirliği, *D* inkardır. Skorlar *R* ödül, *L* kayıp, *W* kazanç, ve *P* cezalandırmadır. Aşağıdaki eşitsizlikler varsayılmaktadır:

$$W > R > P > L \qquad \text{ve} \qquad R > \frac{W+L}{2} \qquad (44) \quad \text{dür.}$$

İlk eşitsizlik mahkumlar çıkmazı oyununu tanımlamaktadır. İkincisi ödülün her iki skoru de geçtiğini söylemektedir.

Bildiğimiz gibi statik oyunun tek Nash dengesi inkardır. Oyun tekrarlanırsa denge değişir mi?

Oyun T kere sonlu sayıda oynansın. Son oyunu düşünelim. Gelecek davranışıyla ilgili söz verme ve tehdit etme önemsizdir. Son periyottaki altoyun basit statik mahkumlar çıkmazıdır. Böylece, son altoyun için yalnızca denge her iki oyuncu için de inkardır. *T* – 1 periyodunu düşünelim. *T* zamanında işbirliği sözü her iki oyuncu da inkar edeceğinden anlamsızdır. Böylece *T* – 1 periyodunda tek denge inkardır.

Buradan hareketle ilk oyuna kadar inilebilir ve denge inkar olacaktır.

> **TEOREM 4**: Sonlu Tekrarlı Oyunda Altoyun Nash Dengesi. $G(T)$ statik G oyununun T kere tekrarlı hali olsun. G oyununun tek bir Nash dengesi varsa, her oyuncu için $G(T)$ oyununun Altoyun Nash Dengesi her T periyotta G oyununun statik denge stratejisini oynamaktır.

Şimdi sonsuz sayıda tekrarlı oyunları inceleyelim. Böyle bir analiz için ıskonto kavramını incelemeliyiz. Gelecekteki parasal skorların bugünkü değeri vardır. Bu eşdeğerler bugünkü değerde anlamını bulmaktadır. Bugünkü değer hesaplamasını önceki bölümde görmüştük.

Sonsuz tekrarlı mahkumlar çıkmazının dengesini bulmak için, öncelikle gerisel tümevarım argümanını kullanmalıyız, çünkü oyunun sonu yoktur.

Bu oyunda oyuncunun stratejisi her t zamanında ne yapacağını belirtmektedir. Bu noktaya kadar oyunun bütün geçmişine koşullu eylemler söz konusudur.

Bu noktada tetik (triggger) stratejisi kullanılmaktadır.

> **TANIM 9**: Tetik Stratejileri. Sonsuz tekrarlı bir oyunda tetik stratejisi aşağıdaki biçimdedir:
> **(a)** $t = 0$ zamanında işbirliği,
> **(b)** $t > 0$ zamanında bütün oyuncular bütün evvelki periyotlarda işbirliği yaptıysa işbirliği, aksi takdirde inkar etmedir.

Mahkumlar çıkmazından başka oyunlarda, işbirliği stratejisi statik Nash dengesinden daha yüksek skorlu bir strateji ve inkar stratejisi statik Nash dengesi stratejisidir.

> **TEOREM 5**: Sonsuz Tekrarlı Oyunlarda Dengeler. $G(\infty)$, G statik sonsuz tekrarlı oyunu ıskontolu olarak göstersin. O zaman,

(a) Her oyuncu için her zaman $G(\infty)$ oyununda statik denge stratejisini her periyotta oynayan en azından bir denge vardır.

(b) Bugünkü değer yaklaşımından dolayı, $G(\infty)$ dengesi statik Nash dengesinden daha büyük skorlara sahiptir.

Teoremin ilk bölümünü statik Nash stratejisinin tekrarlanması $G(\infty)$ oyununun bir dengesidir. İkincisi, inkarın gelecekteki getirisi işbirliğinden az olduğundan, inkar optimal olmayabilir. Buna Folk teoremi denmektedir.