Bölüm 8

Eşanlı Denklem Modelleri

8.1 Eşanlı Denklem Modellerinin Niteliği

8.1.1 Eşanlı Denklem Modelleri

- Şimdiye kadar içinde yalnızca bir Y bağımlı değişkeni olan tek denklemli modelleri ele aldık.
- Bir ya da birden fazla X açıklayıcı değişkeni içerebilen bu modellerde, nedenselliğin yönü de tanımlı ve X'ten Y'ye doğru idi.
- Ancak, gerçek hayatta çoğu zaman basit ve tek yönlü bir neden sonuç ilişkisinden söz etmek doğru değildir.
- Değişkenler arasındaki ilişkinin iki yönlü olduğu bu gibi durumlarda açıklayıcı ve bağımlı değişken ayrımı güçleşir.
- İşte böyle durumlarda birden fazla Y bağımlı değişkeninin farklı denklemler aracılığıyla tanımlandığı *"eşanlı denklem"* (simultaneous equation) modellerinden yararlanılır.
- Eşanlı denklem modellerinde birden fazla karşılıklı ya da ortak bağımlı değişken vardır ve bunlar arasındaki ilişkiler birden fazla denklem kullanılarak anlatılır.
- Önceki modellerin aksine, eşanlı denklem modellerindeki bir denkleme ait katsayıları doğru tahmin etmek için diğer denklemlerin verdiği bilgiyi de dikkate almak gereklidir.
- Bu bölümde, eşanlı denklem modellerine örnekler verecek ve bu modellerin neden SEK yöntemi ile genellikle tahmin edilemeyeceğini göstereceğiz.

- Tek denklemli modellerdeki eşanlılık sorununu çözmeye yönelik araç değişkenler yaklaşımını inceleyecek ve buna ilişkin sınama ve tahmin yöntemlerini de ele alacağız.

Gelir-Para Arzı Modeli Örneği

- Eşanlı denklemlere örnek olarak şu modeli gösterebiliriz:

$$\begin{array}{ll} \text{Gelir işlevi:} & Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 M_t + \alpha_3 W_t + \alpha_4 \Pi_t + u_t \\ \text{Para arzı işlevi:} & M_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 E_t + v_t \end{array}$$

- Burada
  Y_t milli geliri,
  M_t para stoğunu,
  W_t ücret ödemelerini,
  Π_t firma karlarını
  E_t ise döviz kurunu
  göstermektedir.

- Miktar kuramı ile toplam üretime gelir yaklaşımının karışımı olan modele göre, para arzı milli geliri belirleyicidir.

- Diğer yandan para arzı da merkez bankası tarafından gelir düzeyine bağlı olarak belirlendiği için, Y ve M arasında iki yönlü bir ilişki bulunmaktadır.

Klein Model I Örneği

- Daha kapsamlı bir örnek olarak, Lawrence Klein tarafından 1950 yılında geliştirilen Klein Model 1 sistemini ele alalım.

$$\begin{array}{lllllll} \text{Tüketim işlevi:} & C_t = & \alpha_1 & + \alpha_2 \Pi_t & + \alpha_3 \Pi_{t-1} & + \alpha_4 (W_t + S_t) & + u_t \\ \text{Vergi işlevi:} & I_t = & \beta_1 & + \beta_2 \Pi_t & + \beta_3 \Pi_{t-1} & + \beta_4 K_{t-1} & + v_t \\ \text{Ücret işlevi:} & W_t = & \lambda_1 & + \lambda_2 Y_t & + \lambda_3 Y_{t-1} & + \lambda_4 t & + \epsilon_t \\ \text{Gelir tanımı:} & Y_t = & C_t & + I_t & + G_t & & \\ \text{Kazanç tanımı:} & \Pi_t = & Y_t & - W_t & - T_t & & \\ \text{Sermaye tanımı:} & K_t = & K_{t-1} & + I_t & & & \end{array}$$

- Bir makroekonominin nasıl işlediğini anlatan modeldeki ilişkilerin çok yönlülüğü dikkat çekicidir.

- En üstteki üç denkleme *"davranışsal denklem"* (behavioral equation) adı verilir. Bunlar, firma ve tüketiciler gibi iktisadi oyuncuların davranışlarının sonucunu gösterir.

- Daha alttaki üç denklem ise hesaplamasal ilişkileri anlatan tanımlardır.
- Altı eşanlı denklemden oluşan Klein Model I sisteminde toplam 10 değişken bulunmaktadır. Bunlar

C_t	tüketim harcamaları,
I_t	yatırım harcamaları,
W_t	özel sektör ücret ödemeleri,
Y_t	toplam üretim,
Π_t	firma karları,
K_t	sermaye stoğu,
G_t	kamu mal ve hizmet harcamaları,
S_t	kamu ücret ödemeleri,
T_t	dolaylı vergiler ve
t	zaman

şeklindedir.
- Günümüzde artık çağdışı kalan bu doğrusal model, ABD makroekonomisinin ilk modeli olması açısından önemlidir.

Eşanlı Denklem Modelinin Genel Gösterimi

- Eşanlı denklem modelinin genel gösterimi şöyledir:

$$
\begin{array}{lllllll}
Y_{1i} = \alpha_{11} & + \alpha_{12}Y_{2i} & + \cdots + \alpha_{1r}Y_{ri} & + \beta_{11}X_{1i} & + \cdots + \beta_{1k}X_{ki} & + u_{1i} \\
Y_{2i} = \alpha_{21}Y_{1i} & + \alpha_{22} & + \cdots + \alpha_{2r}Y_{ri} & + \beta_{21}X_{1i} & + \cdots + \beta_{2k}X_{ki} & + u_{2i} \\
\vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Y_{ri} = \alpha_{r1}Y_{1i} & + \alpha_{r2}Y_{2i} & + \cdots + \alpha_{rr} & + \beta_{r1}X_{1i} & + \cdots + \beta_{rk}X_{ki} & + u_{ri}
\end{array}
$$

- Burada

$Y_1, \ldots, Y_r$	ortak bağımlı değişkenleri,
$X_1, \ldots, X_k$	bağımsız açıklayıcı değişkenleri,
$u_1, \ldots, u_r$	olasılıksal hata terimlerini

göstermektedir.
- Y ve X'lerin katsayıları sırasıyla α ve β ile gösterilmiştir.
- Eşanlı denklem modellerindeki X değişkenleri olasılıksal değildir. Bu değişkenler modelin dışından geldikleri için bunlara *"dıştürel"* (exogenous) değişken denir.
- Değerleri önceden belirlenmiş olmadığı için, ortak bağımlı değişken Y'ler olasılıksaldır. Model içinde tanımlanan bu değişkenlere *"içtürel"* (endogenous) değişken adı verilir.

- Model geleceği tahmin için kullanıldığında yalnızca içtürel değişkenler için değer üretir. Dıştürel değişkenler ise verili olmalıdır.
- Bir değişkenin içtürel mi yoksa dıştürel mi olacağına karar vermek modeli belirten kişiye kalmıştır.
- Bu noktada dikkatli davranılmalı, yapılan ayrım önsel ya da iktisat kuramı temelinde savunulabilmelidir.

8.1.2 Özdeşleme Sorunu

Eşanlı denklem modellerindeki değişkenlerin birden fazla denklemde yer aldıkları yetmezmiş gibi, başlarındaki katsayılar farklı denklemlerde farklıdır. Böyle karmaşık bir yapı altında tahmin edilen denklemin hangi denklem, katsayının ise hangi katsayı olduğunu bilmek güçtür. Bir denkleme ait katsayıların hesaplanıp hesaplanamayacağına ilişkin olarak üç olasılık söz konusudur:

1. *"Eksik özdeşleme"* (under identification): Bazı katsayıların değeri hesaplanamamaktadır.
2. *"Tam özdeşleme"* (exact identification): Her bir katsayı için tekil bir değer hesaplanabilmektedir.
3. *"Aşırı özdeşleme"* (over identification): Katsayıların biri ya da daha fazlası için birden çok değer söz konusudur.

Özdeşleme Kuralları

- Karmaşık bir modelde katsayıları bulabilmek için yeterli bilgi olup olmadığını anlamak zor bir sürece dönüşebilir.
- Bu işlemi kolaylaştıran çeşitli özdeşleme kuralları vardır. Uygulamada, özdeşleme değerlendirilirken genellikle *"sıra koşulu"* (order condition) kuralına başvurulmaktadır.
- **Sıra koşulu**

  Toplam r denklemli modeldeki bir denklemin özdeşlenebilmesi için, denklemin bu modeldeki en az $r - 1$ değişkeni dışlaması gereklidir. Denklem eğer tam olarak $r - 1$ değişkeni dışlıyorsa tam özdeşlemeli, $r - 1$'den fazla değişkeni dışlıyorsa da aşırı özdeşlemelidir.
- Örnek olarak, baştaki gelir-para arzı modelinde iki denklem olduğu için her denklem bir değişken dışlamalıdır. Demek ki gelir işlevi tam, para arzı işlevi ise aşırı özdeşlemelidir.

8.1.3 Eşanlı Denklem Yanlılığı

- Eşanlı denklem modellerinin temel özelliği, bir denklemde bağımlı olan değişkenin diğer bir denklemde açıklayıcı değişken olabilmesidir.
- Böyle içtürel açıklayıcı değişkenlerin en büyük sakıncası ise bağlanım hata terimi ile genellikle ilişkili çıkmalarıdır.
- X'lerin olasılıksal olmadığı varsayımının çiğnenmesi anlamına gelen bu durumda SEK tahmincileri tutarsızdır.
- Diğer bir deyişle, SEK tahmincileri yanlıdır ve bu yanlılık örneklem büyüklüğü artsa bile ortadan kalkmaz.
- Eşanlı denklem yanlılığını cebirsel olarak göstermek için aşağıdaki basit Keynesçi gelir modelini ele alalım.

$$\begin{array}{ll} \text{Tüketim işlevi:} & C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + u_t \\ \text{Gelir tanımı:} & Y_t = C_t + S_t \end{array}$$

- Burada
  C_t tüketim harcamasını,
  Y_t geliri,
  S_t de tasarrufu göstermektedir.
- $\beta_1 > 0$ ve $0 < \beta_2 < 1$ ise otonom tüketimi ve marjinal tüketim eğilimini anlatan anakütle değiştirgeleridir.
- C_t ve Y_t'nin karşılıklı bağımlı oldukları görülmektedir.

Hata Teriminin Y ile İlintili Olması

- İlk olarak elimizdeki modelde Y_t'nin hata terimi ile ilintili olduğunu gösterelim.
- Tüketim işlevini gelir özdeşliğinde yerine koyarsak şunu buluruz:

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_1 + \beta_2 Y_t + u_t + I_t \\ Y_t &= \frac{\beta_1}{1-\beta_2} + \frac{1}{1-\beta_2} I_t + \frac{1}{1-\beta_2} u_t \end{aligned}$$

- $E(u_t) = 0$ varsayımından ve I_t'nin önceden belirli olduğu için beklenen değerinin kendisine eşit olma özelliğinden yararlanarak şunu elde ederiz:

$$E(Y_t) = \frac{\beta_1}{1-\beta_2} + \frac{1}{1-\beta_2} I_t$$

(... devam)

- Yukarıdaki üçüncü denklemi ikinciden çıkartalım.

$$Y_t - E(Y_t) = \frac{u_t}{1-\beta_2}$$

- $E(u_t) = 0$ olduğuna göre $u_t - E(u_t) = u_t$ diyebiliriz.
- Buna göre Y_t ve u_t arasındaki kovaryans şöyledir:

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_t, u_t) &= E\left([Y_t - E(Y_t)][u_t - E(u_t)]\right) \\ &= \frac{E(u_t^2)}{1-\beta_2} \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\beta_2} \end{aligned}$$

- $0 < \beta_2 < 1$ ve $\sigma^2 > 0$ olduğu için $\text{cov}(Y_t, u_t)$ sıfırdan farklı olmalıdır. Bu durumda hata teriminin bağımlı değişken ile ilintisiz olduğu yönündeki SEK varsayımı çiğnenmiş olur.

Değiştirge Tahminlerinin Yanlı Olması

- İkinci olarak Y_t ve u_t arasındaki ilinti nedeniyle değiştirge tahminlerinin yanlı olduğunu göstermek istiyoruz.
- Bunun için $\hat{\beta}_2$ formülünü anımsayalım:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2 &= \frac{\sum c_t y_t}{\sum y_t^2} \\ &= \frac{\sum C_t y_t}{\sum y_t^2} \end{aligned}$$

- Alışık olduğumuz gibi, küçük harfler burada ortalamadan sapmaları göstermektedir.
- Formül ikili bağlanım konusunda gördüğümüz ile aynıdır. Tahmin edilen şey tüketim işlevi olduğu için C_t'nin bağımlı, Y_t'nin ise açıklayıcı değişken olduğuna dikkat ediniz.

(... devam)

- Şimdi, $\hat{\beta}_2$ formülündeki C_t yerine bunun tüketim işlevindeki eşitini koyalım:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_2 &= \frac{\sum(\beta_1 + \beta_2 Y_t + u_t)y_t}{\sum y_t^2} \\ &= \beta_2 + \frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\end{aligned}$$

- *Dikkat:* Yukarıdaki ikinci adımda $\sum Y_t y_t / \sum y_t^2 = 1$ ve $\sum y_t = 0$ özelliklerinden yararlanılmıştır.
- Her iki yanının beklenen değerini alırsak şunu buluruz:

$$E(\hat{\beta}_2) = \beta_2 + E\left[\frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\right]$$

- Beklenen değer işlemcisi doğrusal olduğu için en sağdaki terimi değerlendiremiyoruz. Ancak açıkça görülüyor ki $\sum y_t u_t$ terimi sıfır olmadıkça $\hat{\beta}_2$ yanlı bir tahmin edicidir.

Değiştirge Tahminlerinin Tutarsız Olması

- Eşanlılık altında tahminlerin tutarsız olduğunu göstermek için, bulmuş olduğumuz $E(\beta_2)$ formülünden yola çıkıyoruz:

$$E(\hat{\beta}_2) = \beta_2 + E\left[\frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\right]$$

- Yukarıda görülen $\sum y_t u_t$ bir örneklem kavramıdır. Bu terim bir anakütle kavramı olan cov(Y_t,u_t) ile yakından ilişkilidir ancak ona eşit değildir.
- Bu nedenle Y_t ile u_t'nin ilintili olduğunu, diğer bir deyişle cov$(Y_t,u_t) \neq 0$ eşitsizliğini göstermiş olsak da $\sum y_t u_t \neq 0$ diyemiyoruz.
- Bir tahmincinin beklenen değeri kesin olarak bilinemediği zaman dikkatler bunun kavuşmazsal değerine yöneltilir.
- Bunun için ise *"olasılık sınırı"* (probability limit), kısaca *"plim"* kavramından yararlanılır.

(. . . devam)

- $E(\hat{\beta}_2)$ formülünün her iki yanının olasılık sınırını alalım.

$$\text{plim}(\hat{\beta}_2) = \text{plim}(\beta_2) + \text{plim}\left(\frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\right)$$

- Örneklem büyüklüğü sonsuza giderken $\sum y_t^2/n = \text{var}(y_t)$ olur. Benzer şekilde $\sum y_t u_t/n = \text{cov}(y_t, u_t)$ olur.
- $\text{var}(y_t) = \sigma_Y^2$ ve daha önce bulduğumuz $\text{cov}(y_t, u_t) = \frac{\sigma^2}{1-\beta_2}$ eşitliklerini kullanarak şunu yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \text{plim}(\hat{\beta}_2) &= \text{plim}(\beta_2) + \frac{\text{plim}(\sum y_t u_t/n)}{\text{plim}(\sum y_t^2/n)} \\ &= \beta_2 + \frac{\sigma^2/(1-\beta_2)}{\sigma_Y^2} \end{aligned}$$

- $0 < \beta_2 < 1$ ve $\sigma^2, \sigma_Y^2 > 0$ olduğuna göre, $\hat{\beta}_2$ gerçek β_2'yi olduğundan büyük tahmin etmektedir. Demek ki $\hat{\beta}_2$ yanlıdır ve örneklem büyüse de yanlılık ortadan kalkmamaktadır.

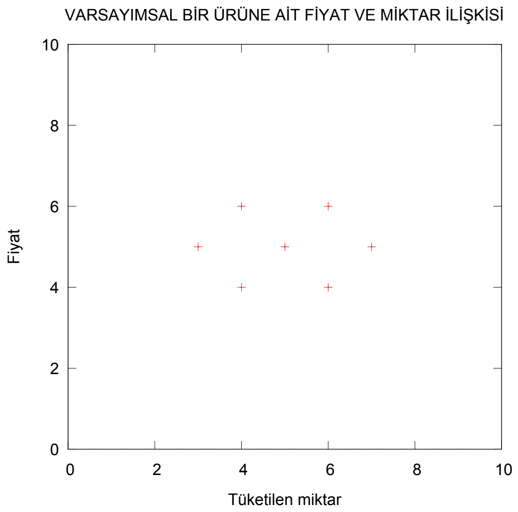
8.2 Tek Denklemli Modellerde Eşanlılık

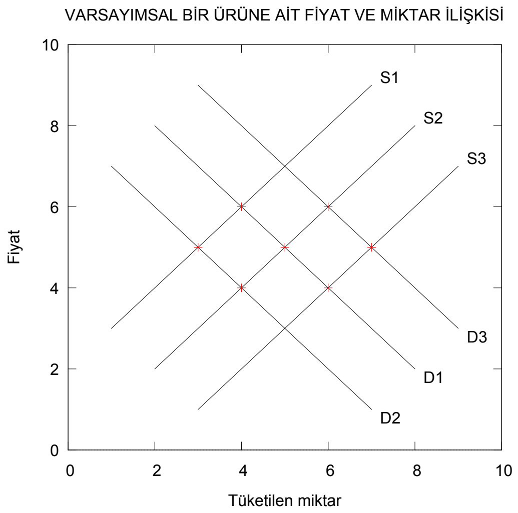
- Eşanlı denklem modellerinin temel özelliğinin birden fazla nedensel bağlantıyı anlatan birden fazla denklemden oluşmaları olduğunu biliyoruz.
- Uygulamada ise sistemi bütün olarak ele almak yerine yalnızca bir denkleme odaklanan tek denklem yöntemleri sıkça kullanılır.
- Denklem sisteminin sakıncası, bir denklemde yanlış işlev biçimi kullanıldığında bunun diğer denklemlere taşınarak ciddi model belirtim hatalarına yol açabilmesidir.
- Tek denklem yaklaşımı bu zorluktan kaçınmakla kalmaz, aynı zamanda uygulama kolaylığı da sağlar.
- Tek denklem yaklaşımında diğer denklemler için açıkça belirtim yapılmaz ama bunları göz ardı etmenin eşanlılık yanlılığına yol açacağı da unutulmaz.
- Örnek olarak, bir ürüne olan talebi tahmin etmek istiyor olalım. Bunun için aşağıdaki gibi bir model belirtebiliriz.

$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_t$$

- Burada
  P_t malın fiyatını,
  Q_t ise tüketilen miktarı
  göstermektedir.
- Talep ile fiyat arasındaki ilişki ters yönlü olduğu için β_2'nin eksi değerli olmasını bekleriz.
- Elimizdeki modelde Q_t ile P_t'nin ortak bağımlı değişkenler olduğunu görmek güç değildir.
- İktisat kuramından, fiyat ve miktarın arz ve talep eğrileri tarafından ortaklaşa belirlendiğini biliyoruz.
- Dolayısıyla, fiyattaki bir değişim ürün miktarını etkilerken üretim maliyetlerinin artması gibi bir nedenden dolayı miktardaki bir değişiklik de fiyatı etkileyecektir.
- Demek ki elimizdeki model, daha önce gördüğümüz tek denklemli modellerden farklı olarak çözülmesi gereken bir eşanlılık sorunu içermektedir.

- Sorunun niteliğini net bir şekilde görmek için varsayımsal fiyat-miktar verilerini serpilim çizimi üzerinde gösterebiliriz.



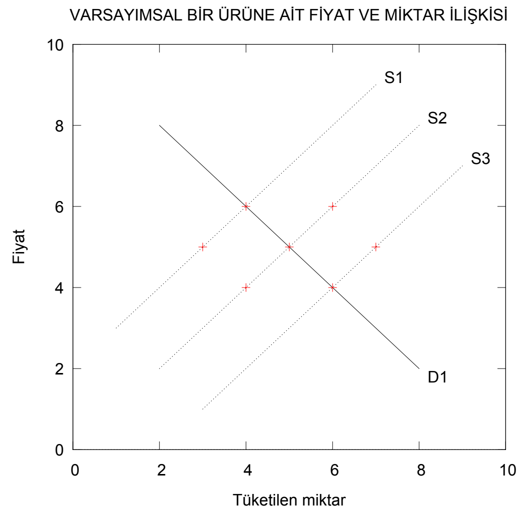


- Çizitlerden anlaşıldığı gibi, elimizdeki fiyat-miktar verileri gerçekte farklı arz ve talep eğrilerinin kesişmesi sonucu ortaya çıkan denge noktalarından başka birşey değildir.

- Dolayısıyla, bu verilere bir doğru yakıştırarak ne talep ne de arz işlevini tahmin etmiş oluruz.

- Başta da göstermiş olduğumuz gibi SEK yöntemi burada yanlı ve tutarsız katsayı tahminleri üretecektir.

- Sorununun farklı bir yaklaşım gerektirdiği açıktır. Bize gereken şey talep sabitken arzın değişmesi sonucu ortaya çıkan fiyat-miktar çiftleridir.
- Sabit bir talep eğrisi üzerindeki noktalardan yararlanarak talep eğrisinin eğimini doğru bir şekilde tahmin edebiliriz.



8.2.1 Araç Değişkenler Yaklaşımı

P_t ve Q_t arasındaki eşanlılık sorununu çözebilmek için *"araç değişkenler modeli"* (instrumental variables model, kısaca IV model) adı verilen yaklaşımı izleriz. IV modelinde bilindik bağımlı ve açıklayıcı değişkenlerin yanı sıra yeni bir değişken türü olarak Z_t araç değişkenleri bulunur. Z_t, geçerli bir araç olmak için iki koşulu sağlamalıdır:

1. *"İlgililik"* (relevance): corr$(Z_t, P_t) \neq 0$.
2. *"Dıştürellik"* (exogeneity): corr$(Z_t, u_t) = 0$.

Kısaca, bu değişken fiyattaki arz eğrisinden kaynaklı değişimi yakalayabilmeli ancak talep tarafından etkilenmeyerek hata terimi ile ilintisiz de kalabilmelidir. Elimizdeki talep işlevi modeli örneğinde üretim maliyetlerini ya da tarımsal bir ürün için hava koşullarını uygun bir araç olarak düşünebiliriz.

- Araç değişkenler modelinin genel gösterimi şöyledir:

Araç değişkenler modeli

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Y'_{1i} + \cdots + \beta_r Y'_{ri} + \beta_{r+1} X_{1i} + \cdots + \beta_{r+k} X_{ki} + u_i$$

- Burada
  Y_i bağımlı değişkeni,
  $Y'_{1i}, \ldots, Y'_{ri}$ içtürel açıklayıcı değişkenleri
  $X_{1i}, \ldots, X_{ki}$ dıştürel açıklayıcı değişkenleri,
  göstermektedir.
- Dıştürel değişkenler u_i ile ilintisizdir. İçtürel değişkenler ise u_i ile ilintilidir ve eşanlılık yanlılığına yol açmaktadır.
- Ayrıca $Z_{1i}, \ldots, Z_{si}$ biçiminde s sayıda araç değişken vardır. Z_i'ler Y_i''leri açıklayıcıdır ama hata terimi ile de ilintisizdir.
- Araç değişken sayısı içtürel değişken sayısından azsa, model eksik özdeşlemeli demektir. Araç sayısı eşitse tam özdeşlemeli, fazlaysa da aşırı özdeşlemeli model olur.

Tek Denklem ile Eşanlı Denklemler İlişkisi

- Elimizdeki talep işlevi modelinin ve bu modeli doğru tahmin edebilmek için önerdiğimiz araç değişkenler yaklaşımının temelinde eşanlı denklemler olduğuna dikkat edelim.
- P_t ve Q_t arasında iki yönlü bir bağlantı olduğunu biliyoruz. Bu durum aslında iki denklemli bir modeli göstermektedir.
- Tek denklem yaklaşımını benimsemek yerine ilişkiyi bütün olarak ele alsaydık, aşağıdakine benzer bir eşanlı denklem modelimiz olacaktı:

$$\begin{array}{ll} \text{Talep işlevi:} & Q_t^d = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_{2t} \\ \text{Arz işlevi:} & Q_t^s = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \alpha_3 Z_t + u_{1t} \end{array}$$

- Öyleyse Z_t gerçekte açıkça belirtmediğimiz arz işlevindeki bağımsız bir açıklayıcı değişkenden başka birşey değildir.
- Eşanlı denklemlerde bir denklemi diğerlerinden ayırt ederek tahmin edebilmek için özdeşleme kurallarından yararlandığımızdan söz etmiştik.
- Sıra koşuluna göre bu iki denklemli örnekte talep işlevi bir değişkeni dışladığı için tam özdeşlemeli, arz işlevi ise en az bir değişkeni dışlayamadığı için eksik özdeşlemelidir.
- Diğer bir deyişle, Z_t değişkeni arz işlevini denetim altında tutarak talep işlevini özdeşlemekte ve böylece tahmin edilebilir olmasını sağlamaktadır.

- Sonuç olarak, araç değişkenler eşanlı denklemlerdeki tek bir denkleme odaklanan kestirme bir yoldur diyebiliriz.
- Tek denklemli modellerde tüm ilişkileri açıkça modellemek gerekmiyor. Ancak, diğer denklemlerdeki değişkenlerden araç değişken olarak yararlanıyoruz.

8.2.2 Eşanlılık Yanlılığını Saptamak

- Eşanlı denklemler ya da eşanlılık sorunu yokken SEK tahmincileri yansız ve enaz varyanslıdır.
- Eşanlılık altında ise SEK tahmincileri tutarlı bile değildirler ve bu nedenle yerlerini almaşık tahmincilere bırakırlar.
- Ancak bu almaşık tahminciler eğer eşanlılık sorunu yokken kullanılacak olurlarsa enaz varyanslı olmayan tahminler üretmektedirler.
- Bu nedenle, almaşık yöntemleri kullanmak üzere SEK'ten vazgeçmeden önce örneklemde eşanlılık sorununun olup olmadığı sınanmalıdır.
- Bu doğrultuda sıklıkla kullanılan sınama ise 1978 yılında Jerry A. Hausman tarafından geliştirilen ve bir tahminciyi bir diğerine göre değerlendiren Hausman sınamasıdır.

Hausman Sınaması

Bir içtürel ve bir dıştürel değişkeni olan şu modeli ele alalım:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i' + \beta_2 X_{1i} + u_i$$

$Z_{1i}, \ldots, Z_{si}$ ise araç değişkenler olsun. Hausman sınamasının eşanlılığa bakmak için kullanılabilecek basit bir şekli şöyledir:

1. Y_i''nin birtek araç değişkenlere göre aşağıdaki bağlanımı hesaplanır ve kalıntılar kaydedilir:

$$Y_i' = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 Z_{1i} + \cdots + \hat{\alpha}_s Z_{si} + \hat{v}_i$$

2. Kalıntılar özgün modele eklenir ve SEK tahmini yapılır:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i' + \beta_2 X_{1i} + \beta_3 \hat{v}_i + u_i$$

3. Eşanlılık yoksa, $\hat{v}_i$ ve u_i arasındaki ilinti de kavuşmazsal olarak sıfır olmalıdır. Bu nedenle $\hat{v}_i$'nın katsayısına bakılır. β_3 eğer t sınamasına göre anlamlı bulunursa, eşanlılık olmadığını söyleyen sıfır önsavı reddedilir.

8.3 Eşanlı Denklem Yöntemleri

8.3.1 İki Aşamalı Enküçük Kareler Tahmini

- Modelde eşanlılık yanlılığı söz konusu olduğu zaman, SEK tahminleri tutarsızdır ve bu nedenle kullanılmamalıdır.
- Eşanlı denklemleri tahmin etmeye yönelik en temel yol ise *"iki aşamalı en küçük kareler"* (two stage least squares) ya da kısaca *"2AEK"* (2SLS) yöntemidir.
- 2AEK yöntemi ile bulunan tahminler her zaman yansızlık ve enaz varyanslılık özelliklerini sağlayamayabilseler de tutarlıdırlar.
- Diğer bir deyişle, örneklem büyüdükçe yanlılık azalır ve tahminler giderek anakütledeki gerçek değere yaklaşırlar.
- Bu nedenle küçük örneklemlerde dikkatli olunmalı, 2AEK kullanılmadan önce Hausman sınaması yapılıp açıklayıcı değişkenlerin hata terimi ile ilintili olduğu doğrulanmalıdır.
-
- 2AEK bir tek denklem yöntemidir. Araç değişkenler modeli tahmininde kullanıldığı gibi, bir denklem sistemindeki tüm denklemlere ayrı ayrı da uygulanabilir.
- 2AEK yöntemini kullanabilmek için tek gerekli koşul tahmin edilecek denklemin eksik özdeşlemeli olmamasıdır.
- Baştaki gelir-para arzı modelimize geri dönelim.

$$\begin{array}{ll} \text{Gelir işlevi:} & Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 M_t + \alpha_3 W_t + \alpha_4 \Pi_t + u_t \\ \text{Para arzı işlevi:} & M_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 E_t + v_t \end{array}$$

- Y_t'nin gelir, M_t'nin para arzı, W_t'nin ücretler, Π_t'nin karlar, E_t'nin ise döviz kuru olduğunu anımsayalım.
- Özdeşlemede sıra kuralına göre gelir işlevinin tam, para arzı işlevinin ise aşırı özdeşlemeli olduğunu görüyoruz.
- Dolayısıyla her iki denklemi de 2AEK ile tahmin edebiliriz.

Adından anlaşılabileceği gibi, 2AEK iki ayrı SEK tahmini içeren doğrusal bir yöntemdir. Öncelikle para arzı işlevini tahmin edelim. Süreç şu şekildedir:

1. *Birinci aşama:* İçsel açıklayıcı değişken Y_t ile hata terimi v_t arasındaki ilişkiyi yok etmek için, Y_t'nin araç değişkenler ve denklemdeki dışsal değişkenlere göre bağlanımı bulunur. Örneğimizde, E_t para arzı işlevindeki dışsal değişkendir. W_t ve Π_t ise geliri açıklayan ama para arzı ile ilintisiz kabul edilen araçlardır. Buna göre aşağıdaki model hesaplanır.

$$Y_t = \lambda_1 + \lambda_2 W_t + \lambda_3 \Pi_t + \lambda_4 E_t + e_t$$

   Yukarıdaki işlem sonrasında şu iki parça ayrıştırılmış olur:

$$Y_t = \hat{Y}_t + e_t$$

   $\hat{Y}_t$ burada Y_t'nin önceden belirli dışsal değişkenler olan W_t, Π_t ve E_t'ye göre koşullu ortalamasıdır. Modelde içsellik sorunu olmadığı için, e_t terimi SEK varsayımlarını sağlar.

2. *İkinci aşama:* Para arzı denklemi artık aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned} M_t &= \gamma_1 + \gamma_2(\hat{Y}_t + e_t) + \gamma_3 E_t + w_t \\ &= \gamma_1 + \gamma_2 \hat{Y}_t + \gamma_3 E_t + (w_t + \gamma_2 e_t) \\ &= \gamma_1 + \gamma_2 \hat{Y}_t + \gamma_3 E_t + w_t^* \end{aligned}$$

   Yukarıdaki modelin baştaki para arzı işlevinden tek farkı Y_t yerine $\hat{Y}_t$'yı kulanmasıdır. Y_t ilk modeldeki hata terimi v_t ile ilintiliyken, $\hat{Y}_t$ ise w_t^* ile kavuşmazda ilintisizdir. Bu ikinci aşama bağlanımı SEK yöntemi ile bulunabilir. Elde edilecek tahminler tutarlıdır ve örneklem dağılımları da büyük örneklemlerde normal dağılıma yakınsamaktadır.

Yöntemi biraz daha açıklamak için diğer denkleme de bakalım. Modelimizdeki gelir işlevi tam özdeşlemelidir. Dolayısıyla bunu da 2AEK yöntemi ile tahmin edilebiliriz:

1. *Birinci aşama:* Bu denklemde E_t, para arzını açıkladığı ama gelir ile doğrudan ilintili olmadığı düşünülen araç değişkendir. W_t ve Π_t ise dışsal değişkenlerdir. Bu durumda birinci aşama bağlanımı aşağıdaki gibidir:

$$M_t = \theta_1 + \theta_2 E_t + \theta_3 W_t + \theta_4 \Pi_t + \epsilon_t$$

2. *İkinci aşama:* Yukarıdaki tahminden elde edilen $\hat{M}_t$'ler kullanılarak ikinci aşama bağlanımı da şöyle yazılır:

$$\begin{aligned} Y_t &= \theta_1 + \theta_2(\hat{M}_t + \epsilon_t) + \theta_3 W_t + \theta_4 \Pi_t + \omega_t \\ &= \theta_1 + \theta_2 \hat{M}_t + \theta_3 W_t + \theta_4 \Pi_t + (\omega_t + \theta_2 \epsilon_t) \\ &= \theta_1 + \theta_2 \hat{M}_t + \theta_3 W_t + \theta_4 \Pi_t + \omega_t^* \end{aligned}$$

İkinci aşamadaki θ tahminleri kavuşmazsal olarak tutarlıdır.

2AEK Çıkarsama Sorunu

- 2AEK tahminindeki önemli bir nokta çıkarsamaya ilişkindir.
- Hata terimi ω_t^*'nin gerçekte $(\omega_t + \theta_2 \epsilon_t)$ olduğuna ve bunun varyansının da özgün modeldeki ϵ_t'nin varyansından farklı olduğuna dikkat edelim.
- Bu nedenle ikinci aşamada hesaplanan ölçünlü hatalar ve bunlara dayalı güven aralıkları, t ve F değerleri yanıltıcıdır.
- Gerekli düzeltmeyi yapmaya yönelik bir ayarlama formülü bulunmakla birlikte, bilgisayar yazılımlarındaki ilerleme bu ek işlemi ortadan kaldırmıştır.
- Gretl, 2AEK yöntemini tek bir adımda uygulamakta ve tüm istatistikleri ayarlama gerektirmeksizin bulabilmektedir.
- 2AEK terimi ise modelin gerçekten iki ayrı SEK bağlanımı ile hesaplandığı zamanlardan kalma yerleşmiş bir sözcük olarak kullanılmayı sürdürmektedir.

Sayısal Bir Örnek

- Sayısal bir örnek olarak, 1987-2006 arası Türkiye verilerini kullanalım ve para arzı işlevini 2AEK ile tahmin edelim:

$$\begin{array}{lllll} \hat{M}_t = & -82{,}8752 & +\ 2{,}8635\ \hat{Y}_t & +\ 49{,}4770\ E_t & \\ \text{öh} & (80{,}6982) & (0{,}9123) & (17{,}7648) & \\ z & (-1{,}0270) & (3{,}1386) & (2{,}7851) & R^2 = 0{,}7429 \end{array}$$

- Modelin SEK tahminleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{lllll} \hat{M}_t = & -96{,}5514 & +\ 3{,}0196\ Y_t & +\ 47{,}5508\ E_t & \\ \text{öh} & (80{,}4139) & (0{,}9091) & (17{,}7301) & \\ t & (-1{,}2007) & (3{,}3215) & (2{,}6819) & R^2 = 0{,}7433 \end{array}$$

- Sonuçlar arasında dikkate değer farklılıklar bulunmaktadır.
- Hausman sınama istatistiğine bakıldığında ise p-değerinin 0,0022 olduğu görülür.
- SEK tahminlerinin tutarlı olduğu sıfır önsavı reddedildiğine göre, 2AEK yönteminin kullanılması doğrudur.
- Son olarak, 2AEK tahmincisi büyük örneklemlerde normal dağıldığı için t yerine z değerleri verildiğine dikkat ediniz.

Diğer Eşanlı Denklem Tahmin Yöntemleri

Uygulamada eşanlı denklem modellerini tahmin etmek çeşitli durumlara dikkat gerektiren bir sürece dönüşebilmektedir. Farklı özellikler taşıyan almaşık tahmin yöntemlerinden birkaçı ise şunlardır:

- *"Üç aşamalı enküçük kareler"* (three stage least squares)
- *"Sınırlı bilgi ençok olabilirlik"* (limited information maximum likelihood)
- *"Tam bilgi ençok olabilirlik"* (Full information maximum likelihood)
- *"Görünürde ilişkisiz bağlanımlar"* (seemingly unrelated regressions)
- *"Genellemeli Beklemler Yöntemi"* (generalized method of moments)

Bu ileri yöntemler burada ele alınmayacaktır.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev
Kitaptan *Bölüm 18* “Simultaneous-Equation Models,” *Bölüm 19* “The Identification Problem” ve *Bölüm 20* “Simultaneous-Equation Methods”okunacak.

Önümüzdeki Ders
Zaman Serileri Ekonometrisinin Temelleri

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011