TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
İKT351 – Ekonometri I, Ara Sınavı

Öğr.Gör.: Yrd. Doç. Dr. A. Talha YALTA

Ad, Soyad: ____________________

Açıklamalar: Bu sınav toplam 100 puan değerinde 4 sorudan oluşmaktadır. Sınav süresi 90 dakikadır ve tüm soruların yanıtlanması gereklidir. Soruları yanıtlamada kullanılabilecek bazı formül ve/veya tanımlar sorulara ek olarak verilmiştir. Tüm işlemler bu sınav kağıdı üzerinde yapılacaktır. Kopya çekme ve çektirme girişiminde bulunanlar hakkında üniversitenin disiplin kuralları çerçevesinde işlem yapılacaktır. Sınav süresince sınav içeriği ile ilgili soru sormak yasaktır.

Sorular

1. (5 puan) Sıradan En küçük Kareler (SEK) yaklaşımı neden u_i hatalarının toplamı yerine hata karelerinin toplamını enazlama yolunu izler? Açıklayınız.

Yanıt: Bağlanım doğrusu sabit X_i değerlerine karşılık gelen Y_i değerlerinin ortalamalarından geçer. Bu nedenle, eğer hatalar toplamı enazlanacak olursa artı ve eksi değerli hatalar birbirini götürür ve sonuç sıfır çıkar. Bu durumu engellemek için mutlak uzaklığın bir ölçüsü olarak karelerden yararlanılır.

2. Üç farklı aileye ait evcil hayvan sayısı Y_i ve ortalama aylık gelir X_i (1000 TL) varsayımsal verileri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

	Y_i	X_i	X_i^2	y_i	y_i^2	x_i	x_i^2	x_iY_i	$\hat{Y}_i$	$\hat{y}_i$	$\hat{y}_i^2$	$\hat{u}_i$
	0	1										
	0	3										
	3	5										
Top.												
Ort.												

(a) (10 puan) Çizelgenin soldaki 8 sütunluk bölümündeki boş alanları doldurunuz.

Yanıt:

	Y_i	X_i	X_i^2	y_i	y_i^2	x_i	x_i^2	x_iY_i	$\hat{Y}_i$	$\hat{y}_i$	$\hat{y}_i^2$	$\hat{u}_i$
	0	1	1	-1	1	-2	4	0	$-0{,}5$	-1,5	2,25	0,5
	0	3	9	-1	1	0	0	0	1	0	0	-1
	3	5	25	2	4	2	4	6	2,5	1,5	2,25	0,5
Top.	3	9	35	0	6	0	8	6	3	0	4,5	0
Ort.	1	3	35/3	0	2	0	8/3	2	1	0	1,5	0

(b) (10 puan) Y'nin X açıklayıcı değişkenine göre ikili bağlanımına ilişkin $\hat{\beta}_1$ sabit terim ve $\hat{\beta}_2$ eğim katsayısını hesaplayınız ve tahmin edilen bağlanım doğrusunu yazınız.

Yanıt:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X} = 1 - (0{,}75 \times 3) = -1{,}25$$

$$\hat{Y}_i = -1{,}25 + 0{,}75 X_i$$

(c) (10 puan) Çizelgenin sağdaki son dört sütunluk bölümünü doldurunuz ve belirleme katsayısı r^2'yi hesaplayınız.

Yanıt: (Son dört sütunu doldurmak için önceki soruda bulmuş olduğumuz bağlanım doğrusundan yararlanıyoruz. Çizelgenin tamamı yukarıda dolu olarak verilmişti.)

$$r^2 = \frac{\sum \hat{y_i}^2}{\sum y_i^2} = \frac{4{,}5}{6} = 0{,}75$$

(d) (10 puan) Yukarıda elde ettiğiniz $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ ve r^2 değerlerini kullanarak bağlanım sonuçlarını dikkatlice yorumlayınız.

Yanıt: $\hat{\beta}_1 = -1{,}25$ olarak tahmin edilen sabit terim, modele katılmamakla birlikte evcil hayvan sayısında etkili olan tüm etmenlerin ortalama etkisini gösterir. Aylık gelir sıfır kabul edildiğinde evcil hayvan sayısının da -1,25 olması beklentisi vardır. Ancak, böyle bir mekanik yorum bu örnekte iktisadi açıdan anlamlı değildir. $\hat{\beta}_2 = 0{,}75$ katsayısı, ikili bağlanım doğrusunun eğimi olarak bilinir. Aylık gelirde 1333 TL'lik bir artış olduğunda evcil hayvan sayısının da ortalama 1 artacağını göstermektedir. r^2 istatistiği, bağımlı değişkendeki değişimin ne ölçüde açıklayıcı değişkendeki değişimden kaynaklandığının ölçüsüdür. Hesaplanan $r^2 = 0{,}75$ değeri evcil hayvan sayısındaki değişimin yüzde 75 oranında aylık gelirdeki değişim ile açıklanabildiğini anlatır.

3. (5 puan) $\hat{\beta}_2$ SEK tahmincisinin Y bağımlı değişkeninin doğrusal bir tahmincisi olduğu bilgisine dayanarak, $\hat{\beta}_1$ SEK tahmincisinin de doğrusal olduğunu gösteriniz.

Yanıt: $\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}$ olduğunu anımsayalım. Formülde yer alan $\bar{Y}$ ve $\bar{X}$ ortalamaları sabit birer sayıdırlar. Bu durumda, $\hat{\beta}_2$ Y'nin doğrusal işlevi olduğu için $\hat{\beta}_1$ de Y'nin doğrusal işlevidir.

4. (25 puan) $\text{var}(Y_i) = \text{var}(u_i) = \sigma^2$ ve $\text{var}(\hat{\beta}_2) = \sigma^2 / \sum x_i^2$ eşitliklerini kullanarak, $\hat{\beta}_2$ SEK tahmincisinin β_2'nin tüm doğrusal tahmincileri içerisinde enaz varyanslı tahminci olduğunu kanıtlayınız. Her adımda ne yaptığınızı veya neyi gösterdiğinizi tek **bir** tümce ile açıklayınız.

Yanıt: β_2'nin en küçük kareler tahmincisinden yola çıkalım: $\hat{\beta}_2 = \sum k_i Y_i$.

β_2 için başka bir doğrusal tahminci tanımlayalım: $\tilde{\beta}_2 = \sum w_i Y_i$.

Yukarıdakinin iki yanının beklenen değerini alalım:

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_2 &= \sum w_i E(Y_i) \\
&= \sum w_i(\beta_1 + \beta_2 X_i) \\
&= \beta_1 \sum w_i + \beta_2 \sum w_i X_i
\end{aligned}$$

$\text{var}(\hat{\beta}_2) \leq \text{var}(\tilde{\beta}_2)$ savını kanıtlamak için $\tilde{\beta}_2$'nın varyansını ele alalım:

$$\begin{aligned}
\text{var}(\tilde{\beta}_2) &= \text{var}(\sum w_i Y_i) \\
&= \sum w_i^2 \text{var}(Y_i) \\
&= \sigma^2 \sum w_i^2 \\
&= \sigma^2 \sum \left(w_i - \frac{x_i}{\sum x_i^2} + \frac{x_i}{\sum x_i^2} \right)^2 \\
&= \sigma^2 \sum \left(w_i - \frac{x_i}{\sum x_i^2} \right)^2 + \sigma^2 \sum \left(\frac{x_i}{\sum x_i^2} \right)^2 + 2\sigma^2 \sum \left(w_i - \frac{x_i}{\sum x_i^2} \right) \left(\frac{x_i}{\sum x_i^2} \right) \\
&= \sigma^2 \sum \left(w_i - \frac{x_i}{\sum x_i^2} \right)^2 + \sigma^2 \left(\frac{1}{\sum x_i^2} \right)
\end{aligned}$$

Yukarıda en sağdaki terim w_i'den bağımsız olduğu için $\text{var}(\tilde{\beta}_2)$'yı enazlayabilmek ilk terime bağlıdır ve ilk terimi sıfırlayan w_i değeri de şudur:

$$w_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2} = k_i$$

w_i enaz olduğu zaman aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\text{var}(\tilde{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} = \text{var}(\hat{\beta}_2)$$

Demek ki w_i ağırlıkları k_i ağırlıklarına eşit olduğu zaman $\tilde{\beta}_2$'nın varyansı enazlanarak $\hat{\beta}_2$'nın varyansına eşitlenmektedir. Buna dayanarak, en küçük kareler tahmincisi $\hat{\beta}_2$'nın tüm yansız ve doğrusal tahminciler içinde enaz varyanslı tahminci olduğunu söyleyebiliriz.

5. (25 puan) $X \sim \text{NBD}(\mu, \sigma^2)$ normal dağılımına uyan X sürekli rastsal değişkeninden alınan n büyüklüğündeki rastsal örnekleme ait $\tilde{\mu}$ ve $\tilde{\sigma}^2$ EO tahmincilerini dikkatlice türetiniz. Her adımda ne yaptığınızı veya neyi gösterdiğinizi tek **bir** tümce ile açıklayınız.

Yanıt: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ için x_i'nin ortak olasılık yoğunluk işlevini şöyle gösterelim:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\mu, \sigma^2)$$

Ortak olasılık yoğunluk işlevini n sayıda tekil yoğunluk işlevinin çarpımı olarak yazalım:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\mu, \sigma^2) = f(x_1|\mu, \sigma^2) f(x_2|\mu, \sigma^2) \ldots f(x_n|\mu, \sigma^2)$$

Normal dağılıma uyan bir rastsal değişkenin olasılık yoğunluk işlevi formülü şudur:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}$$

Her bir x_i için, yukarıdaki ikinci formülü birincide yerine koyarak olabilirlik işlevini elde edelim:

$$\text{Oİ}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}$$

Her iki tarafın logaritmasını alarak log-olabilirlik işlevini bulalım:

$$\begin{aligned}
\ln \text{Oİ} &= -n\ln\sigma - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \\
&= -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki işlevi ençoklayan μ ve σ^2 değerlerini bulabilmek için türev almalıyız.
μ'nün EO tahmincisi için:

$$\frac{\partial \ln \text{Oİ}}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum(x_i - \mu) = 0$$

$$\sum x_i = n\,\mu$$

$$\tilde{\mu} = \frac{\sum x_i}{n}$$

σ^2'nin EO tahmincisi için:

$$\frac{\partial \ln \text{Oİ}}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum(x_i-\mu)^2 = 0$$

$$\frac{n}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}\sum(x_i-\mu)^2$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2$$

Formüller

Olasılık dağılımları

Kesikli birer rd olan X ve Y için:

$E(X) = \sum_x xf(x)$

$E(XY) = \sum_y \sum_x XYf(x,y)$

$\text{var}(X) = \sigma_x^2 = \sum_x (X-\mu)^2 f(X)$

$\quad = \sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$\text{cov}(X,Y) = \sum_y \sum_x (X-\mu_x)(Y-\mu_y)f(x,y)$

$\quad = E(XY) - \mu_x\mu_y$

Çarpıklık $S = \frac{[E(X-\mu)^3]^2}{[E(X-\mu)^2]^3}$

Basıklık $K = \frac{E(X-\mu)^4}{[E(X-\mu)^2]^2}$

İlinti katsayısı $\rho = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}}$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ için:

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Olasılık yoğunluk işlevleri

Normal dağılım:

$N(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}$

İkiterimli dağılım (sırası belirli):

$Bi(k|n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Poisson dağılımı:

$Po(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

Bağlanım çözümlemesi

İkili bağlanım $Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \hat{u}_i$ için:

$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \sum k_i Y_i, \left(k_i = \frac{x_i}{(\sum x_i^2)}\right)$

$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X} \qquad \hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$

$\sigma^2 = \text{var}(\hat{u}_i) = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-2}$

$\text{var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sum X_i^2}{n\sum x_i^2}\sigma^2$

$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$

$\text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -\bar{X}\text{var}(\hat{\beta}_2)$

Hata ve uyum ölçütleri

$\text{TKT} = \sum y_i^2 \qquad \text{BKT} = \hat{\beta}_2^2 \sum x_i^2$

$\text{KKT} = \sum \hat{u}_i^2 = \sum y_i^2 - \hat{\beta}_2^2 \sum x_i^2$

$\text{öh}(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n\sum x_i^2}}\sigma$

$\text{öh}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum x_i^2}}$

$r^2 = \frac{\text{BKT}}{\text{TKT}} = 1 - \frac{\text{KKT}}{\text{TKT}}$

$\quad = \frac{\sum \hat{y_i}^2}{\sum y_i^2} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$

$\quad = \hat{\beta}_2^2 \left(\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2}\right) = \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^2 \sum y_i^2}$

$r = \pm\sqrt{r^2}$

Sınav sonu.