İki Değişkenli Bağlanım – Çıkarsama Sorunu

Önsav Sınaması

Ekonometri 1 – Konu 16

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 BY-NC-SA

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ders Planı

1. Önsav Sınaması
   - Güven Aralığı Yaklaşımı
   - Anlamlılık Sınaması Yaklaşımı
   - Anlamlılık Konusu

Bazı Önemli Noktalar

Önsav sınaması konusu ile ilgili bazı önemli noktalar şunlardır:

- Önsav sınaması, verili bir gözlem ya da bulgunun belli bir önsav ile uyuşup uyuşmadığı sorusu ile ilgilenir.
- Buradaki uyuşmak sözcüğü, önsavdaki değere bu önsavı reddetmemeyi sağlamaya yetecek derecede yakın olmak anlamındadır.
- İleri sürülen önsava H_0 ya da "sıfır önsavı" (null hypothesis) denir ve H_1 ile gösterilen "almaşık önsav" (alternative hypothesis) karşısında sınanır.
- Almaşık önsav "basit" (simple) ya da "bileşik" (composite) olabilir. Eğer belli bir değer öne sürülüyor ise önsav basittir.
- Örnek olarak

  $H_1 : \beta_1 = 3$ basit,
  $H_1 : \beta_1 \geq 3$ bileşik,
  $H_1 : \beta_1 \neq 3$ ise yine bir bileşik önsavdır.

Güven Aralığı Yaklaşımı

- Önsav sınamasına birbirini karşılıklı tamamlayıcı iki farklı yaklaşım vardır.
- Bu yaklaşımlar "güven aralığı" (confidence interval) ve "anlamlılık sınaması" (test of significance) yaklaşımlarıdır.
- Güven aralığı yaklaşımı için karar kuralı aşağıdaki gibidir:

Güven Aralığı Karar Kuralı

Sınanacak katsayı için $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı belirlenir. Eğer katsayı bu güven aralığının içinde ise H_0 reddedilmez. Katsayı eğer güven aralığının dışında kalıyorsa H_0 reddedilir.

Güven Aralığı Yaklaşımı

- Örnek olarak, serbestlik derecesi 11 ve ölçünlü hatası 0,1 olan ve $\hat{\beta}_2 = 0{,}5$ olarak tahmin edilen katsayı için şunu ileri sürdüğümüzü düşünelim:

$$H_0 : \beta_2 = 0{,}8$$
$$H_1 : \beta_2 \neq 0{,}8$$

- Almaşık önsava göre β_2 0,8'den küçük ya da büyük olabilir. Dolayısı ile bu "çift kuyruklu" (two tailed) bir sınamadır.
- Gözlemlenen $\hat{\beta}_2$'nın H_0 ile uyumlu olup olmadığını bulmak için β_2'ye ait %95 güven aralığını oluşturalım:

$$0{,}28 \leq \beta_2 \leq 0{,}72$$

- 0,8 değeri, %95 güven aralığının dışında kalmaktadır.
- Buna göre gerçek β_2'nin 0,8 olduğu önsavını %95 güvenle reddederiz.

Tek Kuyruklu Güven Aralığı

- Zaman zaman almaşık önsavın iki yanlı yerine tek yanlı olduğu yönünde önsel bilgi ya da kuramsal beklentilerimiz olabilir.
- Bu durumda güven aralığı "tek yanlı" (one sided) ya da "tek kuyruklu" (one tailed) olarak aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\beta \geq \hat{\beta} - t_\alpha \text{öh}(\hat{\beta}) \qquad \text{ya da} \qquad \beta \leq \hat{\beta} + t_\alpha \text{öh}(\hat{\beta})$$

- Güven aralığının tek-kuyruklu mu yoksa çift-kuyruklu mu oluşturulacağı almaşık önsavın belirleniş biçimine bağlıdır.

Tek Kuyruklu Güven Aralığı

- Tek kuyruklu sınamaya örnek olarak, serbestlik derecesi 11 ve ölçünlü hatası 0,1 olan $\hat{\beta}_2 = 0{,}5$ için β_2'nin 0,8'den küçük olduğu kanısında olduğumuzu varsayalım.
- Bu durumda sıfır önsavı ve almaşık önsav şöyle seçilir:

$$H_0 : \beta_2 \geq 0{,}8$$
$$H_1 : \beta_2 < 0{,}8$$

- Burada dağılımının sol kuyruğunu göz önüne almaya gerek olmadığı için $1 - \alpha$ güven aralığı $(-\infty,\ \hat{\beta}_2 + t_\alpha \text{öh}(\hat{\beta}_2)]$ olur.
- Tek kuyruklu %95 güven aralığı aşağıdaki gibi bulunur:

$$-\infty \leq \beta_2 \leq 0{,}6796$$

- 0,8 değeri %95 tek yanlı güven aralığının dışında olduğuna göre gerçek β_2'nin 0,8'den büyük ya da 0,8'e eşit olduğu sıfır önsavını %95 güvenle reddedebiliriz.

Anlamlılık Sınaması Yaklaşımı

- Anlamlılık sınaması yaklaşımı güven aralığı yaklaşımını tamamlayıcı ve ona benzer bir süreçtir.
- Normallik varsayımı altında

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\text{öh}(\hat{\beta})}$$

değişkeninin $(n-2)$ sd ile t dağılımına uyduğunu biliyoruz.

- Eğer sıfır önsavı altında sınanmak üzere belli bir β^* değeri seçilmiş ise, yukarıdaki t değeri örneklemden kolayca hesaplanabilir ve bir sınama istatistiği görevi görebilir.

Anlamlılık Sınaması Yaklaşımı

- Anlamlılık sınaması yaklaşımındaki sınama istatistiği t dağılımlı olduğuna göre şu güven aralığını yazabiliriz:

$$P\left[-t_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\beta}-\beta^*}{\text{öh}(\hat{\beta})} \leq t_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha \quad (1)$$

$$|\hat{\beta}-\beta^*| \leq t_{\alpha/2}\text{öh}(\hat{\beta}) \quad (2)$$

- β^* burada H_0 altındaki β'dır. $t_{\alpha/2}$ ise $(\alpha/2)$ anlamlılık düzeyinde ve $(n-2)$ sd ile t çizelgesinden okunan kritik değerdir.

Anlamlılık Sınaması Yaklaşımı

- Anlamlılık sınaması yaklaşımına bir örnek olarak σ^2'yi ele alalım:

$$\chi^2 = (n-2)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^{2*}}$$

- Yukarıda gösterilen değişkenin $(n-2)$ serbestlik derecesi ile ki-kare dağılımına uyduğunu biliyoruz.
- $n = 13$ ve $\hat{\sigma}^2 = 40$ verili olsun.
- $H_0 : \sigma^{2*} = 50$ önsavını sınamak için önce aşağıdaki ki-kare değeri hesaplanır.

$$\chi^2 = (13-2)\frac{40}{50} = 8{,}8$$

- 11 serbestlik derecesi ile ve anlamlılık düzeyi $\alpha = 0{,}05$ için $\chi^2_{0{,}975} = 3{,}82$ ve $\chi^2_{0{,}025} = 21{,}92$'dir.
- Hesaplanan χ^2 değeri yukarıdaki iki değer arasında kaldığı için sıfır önsavı reddedilmez.

Anlamlılık Sınaması Yaklaşımı

t sınaması karar kuralları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Çizelge: t Anlamlılık Sınaması Karar Kuralları

Önsav Türü	Sıfır önsavı	Almaşık önsav	H_0 ret kuralı
Çift Kuyruk	$\beta = \beta^*$	$\beta \neq \beta^*$	$\lvert t \rvert > t_{\alpha/2,\text{sd}}$
Sağ Kuyruk	$\beta \leq \beta^*$	$\beta > \beta^*$	$t > t_{\alpha,\text{sd}}$
Sol Kuyruk	$\beta \geq \beta^*$	$\beta < \beta^*$	$t < -t_{\alpha,\text{sd}}$

- Dikkat: İki değişkenli model için sd $= (n - 2)$'dir.

Bir Önsavı Reddetmemenin Anlamı

- Bir anlamlılık sınamasına dayanarak sıfır önsavının desteklenmesi demek, aslında, örneklem verilerine dayanarak bu önsavı reddedecek bir neden olmadığı anlamına gelir.
- Örnek olarak gerçek $\beta = 0{,}5$ olduğunu varsayalım.
- Verilere dayanarak burada $H_0 : \beta = 0{,}4$ ve $H_0 : \beta = 0{,}5$ gibi farklı önsavlar ileri sürmek olasıdır.
- Ancak bu önsavlardan hangisinin doğru olduğu bilinemez.
- Bu nedenle, tıpkı bir mahkemenin "suçsuzdur" yerine "beraat etmiştir" demesi gibi "kabul ederiz" yerine "reddedemeyiz" sonucuna varmalıyız.

$\beta_2 = 0$ Sıfır Önsavı ve 2t Yöntemi

- Görgül çalışmalarda $H_0 : \beta_2 = 0$ önsavı sıklıkla sınanır.
- Burada amaç Y'nin açıklayıcı değişken X ile ilişkisi olup olmadığına karar vermektir.
- $H_0 : \beta_2 = 0$ sıfır önsavını sınamada "2t başparmak kuralı" (2t rule of thumb) kullanılabilir:

2t Yöntemi

Serbestlik derecesi 30 ya da daha fazla ise, anlamlılık düzeyi $\alpha = 0{,}05$ iken bulunan $t = \hat{\beta}_2/\text{öh}(\hat{\beta}_2)$, mutlak değer olarak eğer 2'den büyükse, $\beta_2 = 0$ sıfır önsavı reddedilir.

- Bunun nedeni, sd$>$ 30 olduğunda, t dağılımındaki alanın yüzde 95'ten büyük bölümünün $(-2, 2)$ değerleri arasında yer almasıdır. Bu durum t çizelgesinden de görülebilir.
- $H_0 : \beta_2 = 0$'a karşı $\beta_2 < 0$ ya da $\beta_2 > 0$ tek yanlı sınamalar için ise kullanılacak değer 2 değil 1,7'dir.

Anlamlılık Düzeyinin Seçimi

- Uygulamada anlamlılık düzeyi α çoğu zaman %1, %5 ya da en çok %10 olarak seçilmektedir.
- Aslında bu değerlerin yerine başka herhangi bir değer de aynı işi görebilir.
- H_0'ı kabul ya da ret kararı verilirken iki tür hata yapılabilir:

I. Tür Hata:	Aslında doğru olan H_0'ı reddetmek.
II. Tür Hata:	Aslında yanlış olan H_0'ı reddetmemek.

- Örneklem büyüklüğü veriliyken, I. tür hata yapma olasılığı azaltılmak istenirse II. tür hata yapma olasılığı artar. Eğer II azaltılırsa bu sefer de I artar.
- Anlamlılık düzeyi seçimindeki klasik yaklaşım, uygulamada I. tür hatanın II. türe göre daha ciddi olduğudur.
- Dolayısıyla, $\alpha = 0{,}01$ ya da $\alpha = 0{,}05$ seçilerek I. tür hata yapma olasılığı olabildiğince düşük tutulur.

Anlamlılığın Kesin Düzeyi

- Önsav sınamasındaki zayıf noktanın α'nın seçimindeki gelişigüzellik olduğunu biliyoruz. "p-değeri" (p-value) kavramı, α değerini seçme sorununu ortadan kaldırır:

P değeri

P-değeri ya da "olasılık değeri" (probability value), anlamlılığın gözlenen kesin düzeyi ya da I. tür hata yapma olasılığının kesin düzeyinin ölçüsüdür.

- Diğer bir deyişle p değeri, sıfır önsavının reddedilebileceği en düşük anlamlılık düzeyini verir.
- Belli bir örneklem veriliyken $|t|$ büyüdükçe p değeri azalır ve sıfır önsavı da gittikçe artan bir güvenle reddedilebilir.
- Güncel ekonometri yazılımları çeşitli sınama istatistiklerine ilişkin p-değerlerini de hesaplayıp verebilmektedir.

İstatistikte Anlamlılık ve Uygulamada Anlamlılık

İstatistiksel anlamlılık uygulamada anlamlığı gerektirmez. Buna ilişkin olarak Türkiye milli gelir-tüketim örneğimizi anımsayalım:

- Örneklemden elde ettiğimiz $\hat{\beta}_2$ değeri 0,59 idi.
- $\hat{\beta}_2$ için %95 güven aralığı (0,56, 0,63) olarak hesaplanır. Buna göre $\beta_2 = 0{,}64$ sıfır önsavını reddedebiliriz.
- Öte yandan, $\hat{\beta}_2$'yı 0,56 ya da 0,63 almak arasındaki farkın uygulamada önemli olup olmadığı da dikkate alınmalıdır.
- Bu sorunun yanıtı modelden modele değişir.
- Örnek olarak, burada $\hat{\beta}_2$ marjinal tüketim eğilimi MTüE'dir. İktisat kuramına göre yatırım çarpanı ise $1/(1 - \text{MTüE})$'dir.
- Buna göre eğer MTüE $= 0{,}56$ ise çarpan 2,27 olurken MTüE $= 0{,}63$ ise de çarpan 2,70 olacaktır.
- Görüldüğü gibi, bu örnekteki fark hem istatistiksel olarak hem de uygulama açısından önemlidir.

Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

Çıkarsamaya ilişkin konular