İki Değişkenli Bağlanım Modeli

SEK Tahmincilerinin Türetilmesi

Ekonometri 1 – Konu 8

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 (cc) BY-NC-SA

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ders Planı

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

- Bağlanım çözümlemesinde amaç, örneklem bağlanım işlevi (ÖBİ) temel alınarak anakütle bağlanım işlevinin (ABİ) olabildiğince doğru biçimde tahmin edilmesidir.
- Bunun için kullanılan en yaygın yol "sıradan en küçük kareler" (ordinary least squares), kısaca "SEK" (OLS) yöntemidir.
- SEK yönteminin 1794 yılında Alman matematikçi Carl Fredrich Gauss tarafından bulunduğu kabul edilir.

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

- SEK yöntemini anlamak için iki değişkenli ABİ'yi anımsayalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

- ABİ gözlenemediğinden ÖBİ kullanılarak tahmin edilir:

$$\begin{aligned} Y_i &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \hat{u}_i \\ &= \hat{Y}_i + \hat{u}_i \end{aligned}$$

- ÖBİ'nin kendisini bulmak için ise "kalıntılar" (residuals), diğer bir deyişle hata terimi kullanılır:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= Y_i - \hat{Y}_i \\ &= Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i \end{aligned}$$

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

- Elimizde n tane X ve Y varken, ÖBİ'yi gözlenen Y'lere olabildiğince yakın biçimde belirlemek istiyoruz.
- Bunun için şu ölçüt benimsenebilir:

$$\min\left(\sum \hat{u}_i\right) = \min\left(\sum (Y_i - \hat{Y}_i)\right)$$

- Ancak bu durumda artı ve eksi değerli hatalar büyük ölçüde birbirlerini etkisiz hale getirecektir.
- Ayrıca burada ÖBİ'ye ne kadar yakın ya da uzak olursa olsun tüm kalıntılar eşit önem taşımaktadır.
- Öyleyse, ÖBİ'yi kalıntılar toplamı en küçük olacak şekilde seçmek iyi bir ölçüt değildir.

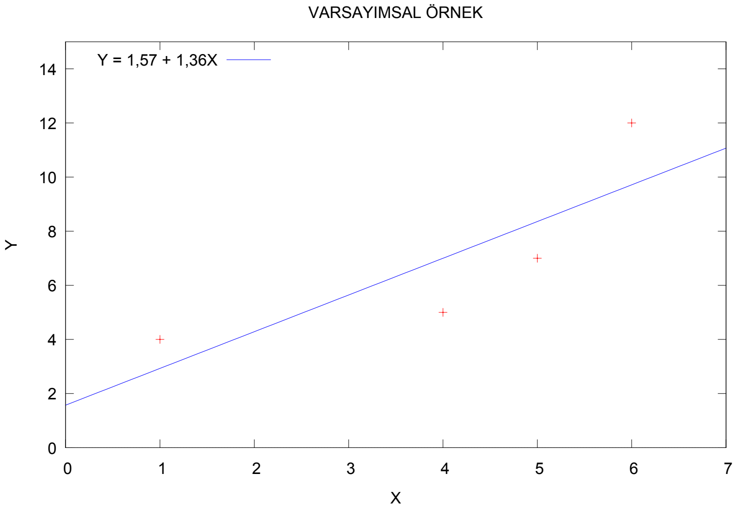
Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

- Herhangi bir veri seti için farklı $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ değerleri farklı $\hat{u}_i$ ve dolayısıyla da farklı $\sum \hat{u}_i{}^2$ toplamları verir.
- Ancak hatalar toplamı $\sum \hat{u}_i$ her zaman sıfır çıkar.
- Örnek olarak, varsayımsal bir veri seti için aşağıdaki iki ÖBİ'yi ele alalım:

$$\hat{Y}_{1i} = 1{,}572 + 1{,}357X_i$$
$$\hat{Y}_{2i} = 3{,}000 + 1{,}000X_i$$

	Y_i	X_i	$\hat{Y}_{1i}$	$\hat{u}_{1i}$	$\hat{u}_{1i}^2$	$\hat{Y}_{2i}$	$\hat{u}_{2i}$	$\hat{u}_{2i}^2$
	4	1	2,929	1,071	1,147	4	0	0
	5	4	7,000	-2,000	4,000	7	-2	4
	7	5	8,357	-1,357	1,841	8	-1	1
	12	6	9,714	2,286	5,226	9	3	9
Toplam	28	16		0	12,214		0	14

Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi



Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

- Artı ve eksi değerler alabilen kalıntıların toplamının küçük çıkma sorunundan kurtulmak için en küçük kareler ölçütü kullanılır:

En Küçük Kareler Ölçütü

$$\begin{aligned} \min\left(\sum \hat{u}_i{}^2\right) &= \min\left(\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2\right) \\ &= \min\left(\sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)^2\right) \end{aligned}$$

- Yukarıdaki gösterimin $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ tahmincilerine dayanan bir matematiksel işlev olduğuna dikkat ediniz.

Normal Denklemler

- SEK, kalıntı kareleri toplamını "enazlamak" (minimize) için, ÖBİ değiştirgelerini hesaplamada basit bir "eniyileme" (optimization) yönteminden yararlanır.
- $\sum(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)^2$ teriminin $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$'ya göre kısmi türevlerini alalım:

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum X_i$$

$$\sum Y_i X_i = \hat{\beta}_1 \sum X_i + \hat{\beta}_2 \sum X_i^2$$

- Burada *n* örneklem büyüklüğüdür.
- Yukarıdaki denklemler "normal denklemler" (normal equations) olarak adlandırılırlar.

Normal Denklemler

- $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ değiştirgeleri, normal denklemlerin eşanlı olarak çözülmesi ile bulunur:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i \sum X_i Y_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}$$

- $\bar{X}$ ve $\bar{Y}$ terimleri X ile Y'nin örneklem ortalamalarıdır.
- Küçük harfler ise "ortalamadan sapma" (deviation from the mean) olarak kullanılmıştır:

$$x_i = (X_i - \bar{X})$$
$$y_i = (Y_i - \bar{Y})$$

SEK Bağlanım Doğrusunun Özellikleri

İkili bağlanım SEK tahmincileri $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$'nın şu özelliklerine dikkat edelim:

- Bunlar birer nokta tahmincisidirler.
- Gözlemlenebilen örneklem değerleri (X_i ve Y_i) cinsinden gösterilir ve dolayısıyla kolayca hesaplanabilirler.
- Örneklem verileri kullanılarak $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ hesaplandıktan sonra, örneklem bağlanım doğrusu da kolayca çizilebilir.

SEK Bağlanım Doğrusunun Özellikleri

SEK yöntemi ile bulunan örneklem bağlanım doğrusu aşağıda verilen özellikleri taşır:

1. Örneklem bağlanım doğrusu, X ve Y'nin örneklem ortalamalarından geçer. ($\bar{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{X}_i$)
2. $\hat{u}_i$ kalıntılarının ortalaması sıfırdır. ($\bar{\hat{u}}_i = 0$)
3. $\hat{u}_i$ kalıntıları tahmin edilen Y_i'lerle ilişkisizdir. ($\sum \hat{u}_i \hat{Y}_i = 0$)
4. $\hat{u}_i$ kalıntıları X_i'lerle ilişkisizdir. ($\sum \hat{u}_i X_i = 0$)
5. Tahmin edilen $\hat{Y}_i$'ların ortalaması, gözlemlenen Y_i değerlerinin ortalamasına eşittir. Bu ÖBİ'den görülebilir:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_i &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i \\ &= (\bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}) + \hat{\beta}_2 X_i \\ &= \bar{Y} + \hat{\beta}_2 (X_i - \bar{X}) \end{aligned}$$

Son satırın her iki yanı örneklem üzerinden toplanıp n'ye bölünürse, $\bar{\hat{Y}} = \bar{Y}$ olarak bulunabilir.

ÖBİ'nin Sapma Biçiminde Gösterimi

- ÖBİ'nin "sapma biçimi" (deviation form) gösterimini bulmak için $Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \hat{u}_i$ işlevinin her iki yanını toplayalım:

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= n\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum X_i + \sum \hat{u}_i \\ &= n\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum X_i \qquad \left(\textstyle\sum \hat{u}_i = 0 \text{ olduğu için}\right) \end{aligned}$$

- Daha sonra bu denklemin her iki yanını n'ye bölelim:

$$\bar{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{X}$$

- Yukarıdaki eşitlik, örneklem bağlanımı doğrusunun X ve Y'nin örneklem ortalamalarından geçtiğini göstermektedir.
- Son olarak yukarıdaki eşitliği ilk eşitlikten çıkaralım:

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= \hat{\beta}_2 (X_i - \bar{X}) + \hat{u}_i \\ y_i &= \hat{\beta}_2 x_i + \hat{u}_i \end{aligned}$$

- Sapma gösteriminde $\hat{\beta}_1$'nın bulunmadığına dikkat ediniz.

Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

SEK tahmincilerinin arzulanan özellikleri