İstatistiksel Kavramların Gözden Geçirilmesi

İstatistiksel Çıkarsama

TÜBA
TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ

UADMK
ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ekonometri 1 – Konu 3

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

UADMK
ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 BY-NC-SA

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ders Planı

Tahmin Sorunu

- İstatistikte bilinmeyenleri tahmin etmenin genel yolu, bilinen bir olasılık dağılımından çekilen n boyutundaki rastsal örneklem verilerini kullanmaktır.
- X, OYİ'si $f(x;\theta)$ olan bir rastsal değişken olsun.
- Burada θ, dağılıma ait herhangi bir anakütle katsayısıdır.
- Rastsal bir örneklem çekilip şöyle bir örneklem değerleri işlevi geliştirilebilir: $\hat{\theta} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- Bize θ'nın bir tahminini veren $\hat{\theta}$'ya "istatistik" (statistic) ya da "tahminci" (estimator) denir ve "teta şapka" (theta hat) diye okunur.
- "Tahmin" (estimation) denilen bu süreç iki bölüme ayrılır:

"Nokta tahmini" (point estimation)
"Aralık tahmini" (interval estimation)

Nokta Tahmini ve Aralık Tahmini

- Nokta tahmini, θ'nın tahminini tek bir değer olarak verir.
- Örnek: Eğer $\hat{\theta} = 20$ ise bu θ'nın nokta tahminidir.
- "En küçük kareler" (least squares) ve "ençok olabilirlik" (maximum likelihood) yöntemleri en yaygın kullanılan iki nokta tahmincisidir.
- Aralık tahmini ise öncelikle θ için $\hat{\theta}_1 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $\hat{\theta}_2 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gibi iki tahminci tanımlar.
- Daha sonra, gerçek θ değerinin belli bir güvenle (olasılıkla) bulunduğu $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ aralığı tahmin edilir.
- Örnek: θ'nın %95 güven aralığı şu olabilir: $19 \leq \theta \leq 21$
- Böyle bir aralığın θ'yı içerdiği kesin olarak bilinemez. Belirlenen aralığın θ'yı içerme olasılığı ya 0'dır ya da 1'dir.
- Öyleyse, bu aralığın yorumu şudur: Eğer böyle 100 aralık hesaplanırsa, bunlardan 95'i aslında değeri bilinemeyen gerçek θ'yı içermelidir.

Arzulanan İstatistiksel Özellikler

- En küçük kareler ve ençok olabilirlik gibi tahmincilerde "arzulanan" (desired) bir takım istatistiksel özellikler vardır.
- Bunları iki kümede inceleyebiliriz:

  "küçük örneklem özellikleri" (small sample properties)
  "kavuşmazsal özellikler" (asymptotic properties)
- Küçük örneklem özellikleri, tahmincinin sınırlı sayıda gözlemden oluşan örneklemlerde taşıdığı özelliklerdir.
- Tahmincinin kavuşmazsal ya da büyük örneklem özellikleri ise örneklem büyüklüğü sonsuza yaklaştıkça gözlenir.

Küçük Örneklem Özellikleri

Yansızlık

Eğer $\hat{\theta}$ gibi bir tahmincinin beklenen değeri gerçek θ'ya eşitse, bu tahminciye θ'nın "yansız" (unbiased) tahmincisi denir:

$$E(\hat{\theta}) = \theta \qquad \text{ya da} \qquad E(\hat{\theta}) - \theta = 0$$

- Kuramsal olarak yansızlık, aynı büyüklükte farklı farklı örneklemler çekilip de katsayı tahmini yapılabilirse, bu tahminlerin ortalamasının giderek anakütledeki gerçek değere yaklaşacağı anlamına gelir.
- Bu durumda yansızlık bir "tekrarlı örnekleme" (repeated sampling) özelliğidir.

Küçük Örneklem Özellikleri

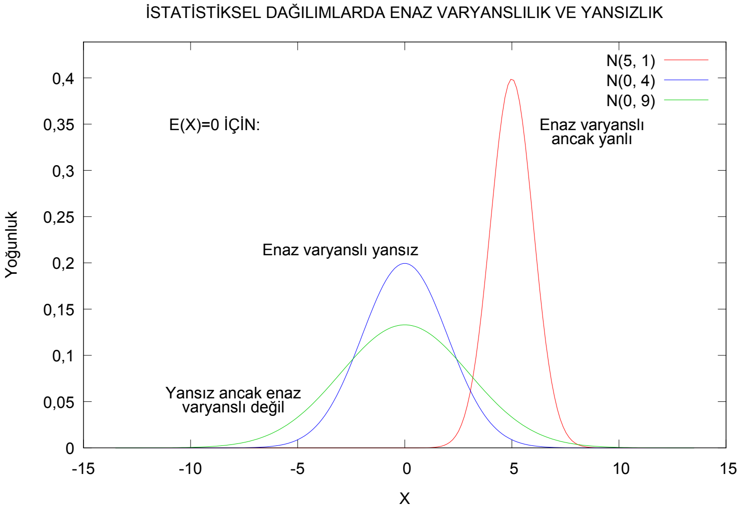
Enaz Varyanslı Tahminci

$\hat{\theta}_1$'in varyansı; θ'ya ilişkin $\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \ldots$ gibi diğer tahmincilerin varyansından küçük ya da ona eşit olsun. Bu durumda, $\hat{\theta}_1$'ya "enaz varyanslı tahminci" (minimum variance estimator) denir.

Enaz Varyanslı Yansız Tahminci

$\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$, θ'nın iki yansız tahmincisi olsun. Eğer $\hat{\theta}_1$'nın varyansı $\hat{\theta}_2$'nın varyansından küçük ya da ona eşitse $\hat{\theta}_1$ tahmincisine "enaz varyanslı yansız" (minimum variance unbiased) ya da "en iyi yansız" (best unbiased) ya da "etkin" (efficient) tahminci denir.

Küçük Örneklem Özellikleri



Büyük Örneklem Özellikleri

Kavuşmazsal Yansızlık

n gözlemli bir örneklem için $\hat{\theta}_n$ tahmincisinin "kavuşmazsal yansız" (asymptotically unbiased) bir tahminci olabilmesi için θ'nın şu koşulu sağlaması gereklidir:

$$\lim_{n \to \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$$

- Diğer bir deyişle, örneklem büyüklüğü artarken eğer $\hat{\theta}$'nın beklenen ya da ortalama değeri gerçek θ'ya yakınsıyorsa, $\hat{\theta}$ tahmincisi kavuşmazsal yansızdır.

Büyük Örneklem Özellikleri

Tutarlılık

Örneklem büyüklüğü *n* artarken $\hat{\theta}$ tahmincisi θ'ya yakınsıyorsa, $\hat{\theta}$'ya "tutarlı" (consistent) tahminci denir.

- Diğer bir deyişle, tutarlı tahmincilerde *n* büyürken $\hat{\theta}$'nın beklenen değeri gerçek θ'ya yaklaşır ve aynı zamanda varyansı da küçülür.
- Dikkat: Yansızlık ve tutarlılık özellikleri kavramsal olarak çok farklıdır. Tutarlılık yalnızca kavuşmazsal bir özelliktir.
- Tutarlılığın yeterli koşulu örneklem sonsuza yaklaşırken hem yanlılığın hem de varyansın sıfıra doğru gitmesidir.

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Büyük Örneklem Özellikleri

- $\hat{\theta}$ tahmincisinin kavuşmazsal dağılımının varyansına, $\hat{\theta}$'ya ait "kavuşmazsal varyans" (asymptotic variance) denir.

Kavuşmazsal Etkinlik

Eğer $\hat{\theta}$ tutarlıysa ve $\hat{\theta}$'nın kavuşmazsal varyansı diğer tüm tahmincilerin kavuşmazsal varyanslarından küçükse, $\hat{\theta}$'ya "kavuşmazsal etkin" (asymptotically efficient) tahminci denir.

Kavuşmazsal Normallik

Örneklem büyürken eğer $\hat{\theta}$ tahmincisinin örneklem dağılımı da normal dağılıma yakınsıyorsa, bu tahmincinin "kavuşmazsal normal" (asymptotically normal) dağıldığı söylenir.

- Kavuşmazsal normallik özelliği, merkezi limit kanıtsavının bir sonucudur.

Doğrusallık Özelliği

Doğrusallık

$\hat{\theta}$ tahmincisi eğer örneklem gözlemlerinin doğrusal bir işlevi ise, buna θ'nın "doğrusal" (linear) tahmincisi denir. Örnek olarak:

$$\hat{\theta} = (ax_1 + bx_2 + cx_3 + \ldots) \qquad \{a, b, c, \ldots\} \in R$$

tahmincisi θ'nın doğrusal bir tahmincisidir.

En iyi Doğrusal Yansız Tahminci

$\hat{\theta}$ eğer θ'nın farklı doğrusal tahmincileri arasında yansız ve enaz varyanslı tahminciyse, $\hat{\theta}$'ya "en iyi doğrusal yansız tahminci" (best linear unbiased estimator), kısaca "EDYT" (BLUE) denir.

Önsav Sınaması

Önsav sınaması konusu aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- X, OYİ'si $f(x;\theta)$ bilinen bir rastsal değişken olsun.
- Burada θ, dağılımın herhangi bir anakütle katsayısıdır.
- Genellikle gerçek θ bilinemez ancak tahmin edilebilir.
- n büyüklüğünde bir rastsal örneklem çekilerek $\hat{\theta}$ tahmincisi bulunmuş olsun.
- Önsav sınaması yöntemi kullanılarak, anakütle katsayısı θ'nın varsayılan bir θ^* değeriyle uyumluluğu sınanabilir.
- Bunun için, eldeki $\hat{\theta}$ tahmini ve bu tahminin olasılık dağılımı ile ilgili bilgi ya da varsayımlardan yararlanılır.

Sıfır Önsavı ve Almaşık Önsav

- Anakütle katsayısı θ'nın seçili bir θ^* değerine eşit olup olmadığı sınanmak isteniyor olsun.
- Bu durumda, $\theta = \theta^*$ savına "sıfır önsavı" (null hypothesis) adı verilir ve $H_0 : \theta = \theta^*$ ile gösterilir.
- Bu sıfır önsavı, $H_1 : \theta \neq \theta^*$ ile gösterilen "almaşık önsav" (alternative hypothesis) savına karşı sınanır.

I. ve II. Tür Hatalar

- Sınama sonuçları değerlendirilirken dikkatli olunmalıdır.
- Sınama sonucu bir olasılık değeri olacağı için hatalı bir karara varılması olasıdır.
- Eğer H_0 aslında doğruyken reddedilirse, buna "I. tür hata" (type I error) denir.
- Eğer H_0 aslında yanlışken reddedilmezse, buna da "II. tür hata" (type II error) denir.

Çizelge: I. ve II. Tür Hatalar

	Gerçek Durum	
Karar	H_0 Doğru	H_0 Yanlış
H_0 Reddedilir	I. tür hata	Hata yok
H_0 Reddedilmez	Hata yok	II. tür hata

Anlamlılık Düzeyi

- Yazında I. tür hata olasılığı α ile gösterilir ve "anlamlılık düzeyi" (significance level) adıyla anılır.
- Önsav sınamasına klasik yaklaşım I. tür hatanın II. türe göre daha ciddi olduğudur.
- Dolayısıyla, uygulamada α 0,01 ya da 0,05 gibi düşük bir düzeyde tutularak I. tür hata yapma olasılığı azaltılır.
- $(1 - \alpha)$ değeri I. tür hatayı yapmama olasılığını gösterdiği için buna "güven katsayısı" (confidence coefficient) denir.
- Örnek olarak, eğer anlamlılık düzeyi $\alpha = 0{,}05$ olarak seçilmişse, güven katsayısı $(1 - \alpha) = 0{,}95$ ya da %95 olur.

Anlamlılık Sınaması ve Güven Aralığı

- Önsav sınamasına iki farklı yaklaşım vardır:

  "güven aralığı" (confidence interval)

  "anlamlılık sınaması" (test of significance)

- Güven aralığı yaklaşımında, anakütle katsayısı θ için tahmin edilen $\hat{\theta}$'ya dayanan bir %100($1 - \alpha$) aralığı kurulur ve bunun $\theta = \theta^*$ değerini içerip içermediğine bakılır.
- Eğer bulunan güven aralığı θ^*'ı içeriyorsa sıfır önsavı reddedilmez, içermiyorsa reddedilir.
- Anlamlılık sınaması yaklaşımında ise $\theta = \theta^*$ varsayımına ilişkin bir sınama istatistiği hesaplanır ve bu istatistiği elde etme olasılığının ne olduğuna bakılır.
- Eğer bu olasılık seçilen α değerinden küçükse sıfır önsavı reddedilir, büyükse reddedilmez.
- Belli bir uygulamada bu iki yaklaşım aynı sonucu verir.

Önsav Sınaması Özet

İstatistiksel bir önsavın sınanmasının adımları kısaca şöyledir:

1. Bir sınama istatistiği alınır. Örnek: $\bar{X}$
2. Sınama istatistiğinin olasılık dağılımı belirlenir.
   Örnek: $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/2)$
3. Sıfır önsavı ve almaşık önsav belirtilir.
   Örnek: $H_0 : \mu = 75, \qquad H_1 : \mu \neq 75$
4. Anlamlılık düzeyi α seçilir. Örnek: $\alpha = 0{,}05$
5. Sınama istatistiğinin olasılık dağılımından bir $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı kurulur ya da sıfır önsavına ilişkin istatistik hesaplanarak bunu elde etmenin olasılığına bakılır.
6. Elde edilen sonuçlara göre sıfır önsavı reddedilir ya da reddedilmez. Karar verilirken her 100 deneyde 100α kez yanlış sonuç bulma riski olduğu unutulmaz.

Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

Ekonometrinin konusu ve yöntembilimi