İstatistiksel Kavramların Gözden Geçirilmesi

Bazı Kuramsal Olasılık Dağılımları

TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ekonometri 1 – Konu 2

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011

Ders Planı

1 Bazı Kuramsal Olasılık Dağılımları

Normal Dağılım

Normal Dağılım

Ortalaması ve varyansı sırasıyla μ ve σ^2 olan "normal dağılım" (normal distribution) aşağıdaki OYİ ile gösterilir:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right), \qquad -\infty \leq x \leq \infty$$

- Normal dağılan bir rd, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ şeklinde gösterilir.
- Normal eğri altında kalan alanın yaklaşık yüzde 68'i $\mu \pm \sigma$ değerleri, yüzde 95 kadarı $\mu \pm 2\sigma$ değerleri ve yüzde 99,7 kadarı da $\mu \pm 3\sigma$ değerleri arasında yer alır.

Ölçünlü Normal Dağılım

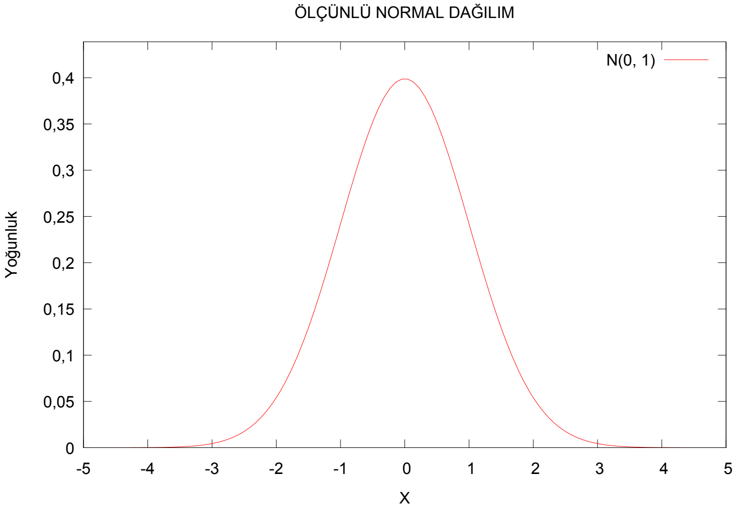
Ölçünlü Normal Dağılım

"Ölçünlü normal dağılım" (standard normal distribution) için $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$'dir ve $X \sim N(0,1)$ diye gösterilir. OYİ'si şudur:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}Z^2\right), \qquad Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

- Formülde görülen exp işlemcisi, e üzeri anlamına gelir.
- μ ve σ^2 değerleri verili ve normal dağılan X rd'si, $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ formülü ile ölçünlü normal değişken Z'ye dönüştürülür.
- Örnek: $X \sim N(8,4)$ olsun. X'in $[6,12]$ arası değerler alma olasılığı için $Z_1 = \frac{6-8}{2} = -1$ ve $Z_2 = \frac{12-8}{2} = 2$'dir. Çizelgeden $P(0 \leq Z \leq 2) = 0{,}4772$ olduğunu görürüz. Bakışım nedeniyle $P(-1 \leq Z \leq 0) = 0{,}3413$ bulunur. Demek ki istenilen olasılık $0{,}3413 + 0{,}4772 = 0{,}8185$'tir.

Ölçünlü Normal Dağılım Örnek



Normal Dağılımın Özellikleri

Normal dağılıma ilişkin bazı özellikler şunlardır:

1. Normal dağılımın 3. ve 4. merkezi beklemleri şöyledir:

   $$\begin{array}{ll} \text{3. merkezi beklem:} & E(X-\mu)^3 = 0 \\ \text{4. merkezi beklem:} & E(X-\mu)^4 = 3\sigma^4 \end{array}$$

   Buna göre, ölçünlü normal dağılımın basıklığı 3'tür. Ayrıca çarpıklığı 0 olduğu için "bakışımlı" (symmetric) olur.

2. Normal dağılan bir rd'nin tek sayılı tüm beklemleri sıfırdır.

3. Normal rd'lerin doğrusal bileşimleri de normal dağılır.
   Örnek: $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ve $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ iki bağımsız rd olsun. Eğer $Y = aX_1 + bX_2$ ise,

   $$Y \sim N\left[(a\mu_1 + b\mu_2), (a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)\right] \text{ olur.}$$

Merkezi Limit Kanıtsavı

- Normal dağılıma ilişkin önemli bir nokta da “Merkezi limit kanıtsavı” (central limit theorem) ya da kısaca “MLK” (CLT) konusudur.
- Merkezi limit kanıtsavı günümüz olasılık kuramının yapı taşlarından biridir.
- MLK’yi kısaca açıklamak için, bağımsız ve benzer şekilde dağılan (ortalama $= \mu$, varyans $= \sigma^2$) n sayıda $X_1, \dots, X_n$ rastsal değişken varsayalım.
- Kanıtsava göre bu rd’ler, n sonsuza giderken ortalaması μ ve varyansı da σ^2/n olan normal dağılıma yakınsarlar.
- Başlangıçtaki OYİ ne olursa olsun bu sonuç geçerlidir.

χ^2 (Ki-Kare) Dağılımı

χ^2 (Ki-Kare) Dağılımı

$Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_k$, k sayıda ölçünlü normal değişken olsun. Bu durumda

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$$

rastsal değişkeni, χ^2 şeklinde gösterilen "ki-kare" (chi-square) dağılımına uyar.

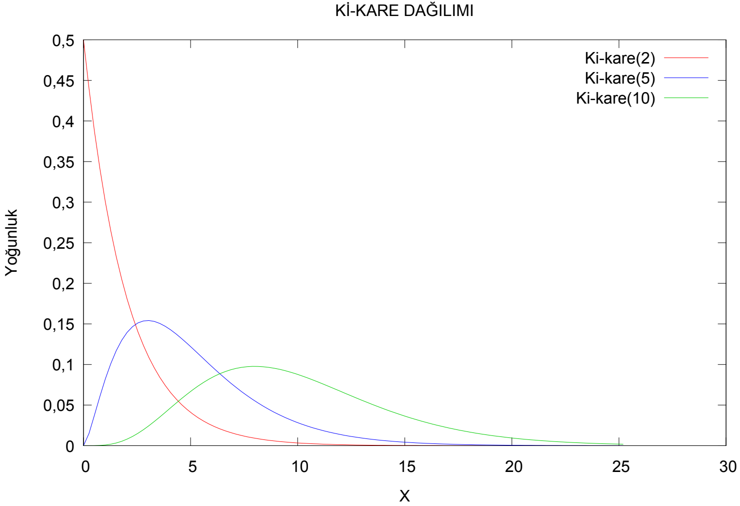
- Buradaki k değeri, ki-kare değişkenine ait "serbestlik derecesi" (degrees of freedom) ya da kısaca "sd" (df) olarak tanımlanır.

χ^2 (Ki-Kare) Dağılımının Özellikleri

Ki-kare dağılımına ilişkin bazı özellikler şunlardır:

1. Ki-kare, "sağa çarpık" (right-skewed) bir dağılımdır ancak serbestlik derecesi arttıkça bakışıma yaklaşır.
2. k sd'li bir χ^2 dağılımının ortalaması k, varyansı ise $2k$'dir.
3. Eğer Z_1 ve Z_2 iki bağımsız dağılan ki-kare değişkeniyse, $Z_1 + Z_2$ toplamı da sd $= k_1 + k_2$ olan bir χ^2 değişkeni olur.

χ^2 (Ki-Kare) Dağılımı Örnek



Student T Dağılımı

Student T Dağılımı

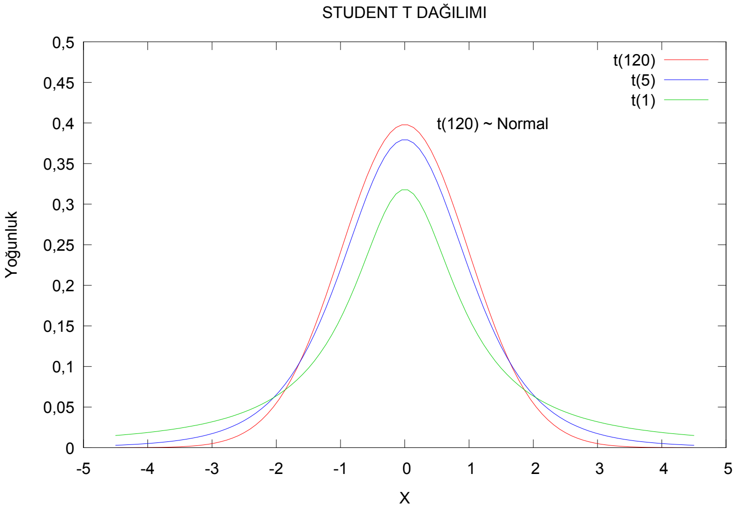
Z_1 bir ölçünlü normal değişken ve Z_2 de Z_1'den bağımsız bir ki-kare değişkeni olsun. Bu durumda:

$$t = \frac{Z_1}{\sqrt{Z_2/k}}$$

değişkeni, k sd ile "Student *t*" (Student's *t*) dağılımına uyar.

- Neredeyse tüm çalışmalarını "Student" takma adı ile yazmış olan istatistikçi William Sealy Gosset (1876-1937) tarafından bulunmuştur.
- *t* dağılımı da normal dağılım gibi bakışımlı ancak daha basıktır. Sd'si yükseldikçe normal dağılıma yakınsar.
- Ortalaması 0, varyansı ise $k > 2$ için $k/(k-2)$'dir.

Student T Dağılımı Örnek



Fisher-Snedecor F Dağılımı

Fisher-Snedecor F Dağılımı

Z_1 ve Z_2, k_1 ve k_2 sd'li bağımsız iki ki-kare değişkeni olsun. Bu durumda:

$$F = \frac{Z_1/k_1}{Z_2/k_2},$$

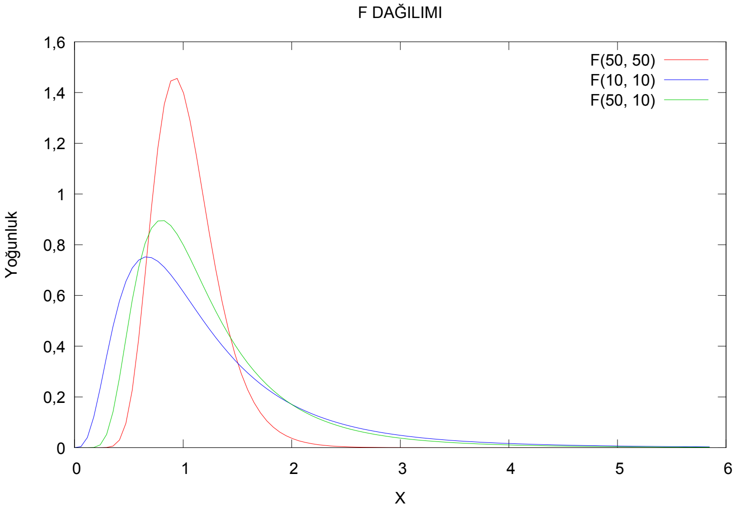
k_1 ve k_2 sd'li bir "F dağılımı" (F distribution) biçiminde dağılır.

Fisher-Snedecor F Dağılımının Özellikleri

F dağılımına ilişkin bazı özellikler ise şunlardır:

1. Ki-kare dağılımı gibi F dağılımı da sağa çarpıktır ama k_1 ve k_2 büyüdükçe F dağılımı da normale yakınsar.
2. $k_2 > 2$ için F dağılımının ortalaması şöyledir:
$$\mu = \frac{k_2}{(k_2 - 2)}$$
3. $k_2 > 4$ için F dağılımının varyansı şöyledir:
$$\sigma^2 = \frac{2k_2^2(k_1 + k_2 - 2)}{k_1(k_1 - 2)^2(k_2 - 4)}$$
4. F ile t dağılımları arasında şu ilişki vardır: $t_k^2 = F_{1,k}$
5. Eğer payda sd'si k_2 yeterince büyükse F ve ki-kare dağılımları arasında şu ilişki vardır: $k_1 F_{k_1,k_2} \sim \chi^2_{k_1}$

Fisher-Snedecor F Dağılımı Örnek



Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

İstatistiksel çıkarsama