

## CEVAPLAR

### ALIŞTIRMALAR 8

1. a.  $(\mathcal{D}_4 : N) = 2$  olduğundan,  $N \triangleleft \mathcal{D}_4$

b. Her  $A \in SL(2, \mathbb{R})$  ve  $P \in GL(2, \mathbb{R})$  için  $\det(P^{-1}AP) = \det(A) = 1$ .

3.  $N \trianglelefteq G$ ,  $N = \langle x \rangle$ ,  $H \leq N$  olsun. Bu takdirde, uygun bir  $t \in \mathbb{N}_0$  için  $H = \langle x^t \rangle$  olur.  $x^{kt} \in H$ ,  $g \in G \implies gx^{kt}g^{-1} = (gxg^{-1})^{kt} = y^{kt}$ ,  $y \in N$ . Böylece, uygun bir  $r \in \mathbb{N}_0$  için  $y = x^r$  ve  $gx^{kt}g^{-1} = (x^r)^{kt} = (x^t)^{kr} \in H$ .

5.  $\mathcal{Q}_4$  ün işlem tablosu aşağıdaki gibidir.

	$I$	$-I$	$A$	$-A$	$B$	$-B$	$C$	$-C$
$I$	$I$	$-I$	$A$	$-A$	$B$	$-B$	$C$	$-C$
$-I$	$-I$	$I$	$-A$	$A$	$-B$	$B$	$-C$	$C$
$A$	$A$	$-A$	$-I$	$I$	$C$	$-C$	$-B$	$B$
$-A$	$-A$	$A$	$I$	$-I$	$-C$	$C$	$B$	$-B$
$B$	$B$	$-B$	$-C$	$C$	$-I$	$I$	$A$	$-A$
$-B$	$-B$	$B$	$C$	$-C$	$I$	$-I$	$-A$	$A$
$C$	$C$	$-C$	$B$	$-B$	$-A$	$A$	$-I$	$I$
$-C$	$-C$	$C$	$-B$	$B$	$A$	$-A$	$I$	$-I$

Bu grubun birim ve kendisi dışındaki bir altgrubunun mertebesi ya 2, ya da 4 tür. Mertebesi 2 olan tek alt grup,  $\langle -I \rangle = \{I, -I\}$  olup her  $M \in \mathcal{Q}_4$  için  $M(-I)M^{-1} = -(M(I)M^{-1}) = -I$  dir. Dolayısıyla,  $\langle -I \rangle \triangleleft \mathcal{Q}_4$ . Mertebesi 4 olan her altgrup da indeksi 2 olmasından dolayı normal altgruptur.

7. Her  $k = 1, 2, 3, 4, 5$  için

$[k] = k + \langle 6 \rangle$  olmak üzere,

$\mathbb{Z}_{12} / \langle 6 \rangle = \{[k] : 0 \leq k \leq 5\}$

tir ve işlem tablosu yanda verilmiştir.

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

**9.** Her  $x \in G$ ,  $h \in H$  için  $xhx^{-1} = xhxhh^{-1}(x^{-1})^2 \in H$  olduğundan,  $H \trianglelefteq G$ . Her  $x \in G$  için  $(xH)^2 = x^2H = H$  olduğundan,  $G/H$  Abel.

**11. a.**  $xy = yx \implies xyN = yxN \implies (xN)(yN) = (yN)(xN)$ .

**b.**  $G = \langle x \rangle \implies G/N = \langle xN \rangle$ .

**13.**  $\mathcal{S}_3$  ün eşleniklik sınıfları:  $\varepsilon_1 = \{1\}$ ,  $\varepsilon_{(1\ 2)} = \{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\}$ ,  $\varepsilon_{(1\ 2\ 3)} = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ . Sınıf denklemi:  $|\mathcal{S}_3| = 1 + 2 + 3$

$\mathcal{D}_4$  ün eşleniklik sınıfları:  $M(\mathcal{D}_4) = \{1, d_2\}$ ,  $\varepsilon_{k_1} = \{k_1, k_2\}$ ,  $\varepsilon_{t_1} = \{t_1, t_2\}$ ,  $\varepsilon_{d_1} = \{d_1, d_3\}$ . Sınıf denklemi:  $|\mathcal{D}_4| = 2 + 2 + 2 + 2$ .