ALIŞTIRMALAR 9

1. Aşağıda her şıkta verilen iki grubun izomorf olup olmadıklarını belirleyiniz.

a. $\mathbb{Z}_8^*$, $\mathbb{Z}_{12}^*$	**b.** $\mathbb{Z}_8^*$, $\mathbb{Z}_{10}^*$	**c.** $\mathbb{Z}_8$, $\mathcal{D}_4$	**d.** $\mathbb{Z}_6$, $\mathcal{S}_3$
e. $\mathcal{D}_{12}$, $\mathcal{S}_4$	**f.** $2\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$	**g.** $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$	**h.** $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}$

2. $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$ olmak üzere $\Phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $\Phi(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^+$ nın bir otomorfizmi olduğunu gösteriniz; Φ^{-1} i bulunuz.

3. $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Phi(a+bi) = (a-bi)$ dönüşümünün bir otomorfizm olduğunu gösterip Φ^{-1} i bulunuz. Φ nin $\mathbb{C}$ içindeki çarpma işlemini de koruduğunu, başka bir deyişle, her $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için $\Phi(z_1 z_2) = \Phi(z_1)\Phi(z_2)$ olduğunu gösteriniz.

4. $G = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ve $G' = \{\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ toplamsal gruplarının izomorf olduğunu gösteriniz. Bulduğunuz izomorfizm, G nin (veya G' nün) çarpma işlemini koruyor mu?

5. $G = \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}$, $G^* = G \backslash \{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$ olmak üzere

a. $G \leq \mathbb{R}^{2\times 2}$ ve $G \cong \mathbb{C}$ **b.** $G^* \leq GL(2, \mathbb{R})$ ve $G^* \cong \mathbb{C}^*$

olduğunu gösteriniz.

6. G bir grup, $g, h \in G$ ve $\sigma \in Oto(G)$ ise, $i_g i_h = i_{gh}$, $(i_g)^{-1} = i_{g^{-1}}$ ve $\sigma i_g \sigma^{-1} = i_{\sigma(g)}$ olduğunu kanıtlayınız.

7. Her G grubu için $Oto(G)$ nin bir grup olduğunu ve

a. $g, h \in G$ için $i_g = i_h \Longleftrightarrow h^{-1}g \in M(G)$,

b. $\dot{I}\c{c}(G) \trianglelefteq Oto(G)$, ve $G/M(G) \cong \dot{I}\c{c}(G)$

olduğunu gösteriniz.

8. $Oto(\mathbb{Z})$ yi belirleyiniz.

9. G bir grup, $\Phi : G \longrightarrow G,\ \Phi(x) = x^{-1}$ bir otomorfizm ise, G nin bir Abel grubu olduğunu gösteriniz(Bak. Örnek 7).

10. Aşağıdakilerden her birinin bir otomorfizm olup olmadığını belirleyiniz:

a. $\Phi : \mathbb{Z}_8^* \longrightarrow \mathbb{Z}_8^*,\ \Phi(x) = x^3$ **b.** $\Phi : \mathbb{Z}_9^* \longrightarrow \mathbb{Z}_9^*,\ \Phi(x) = x^3$

c. $\Phi : \mathbb{Z}_{15}^* \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}^*,\ \Phi(x) = x^3$ **d.** $\Phi : \mathbb{Z}_8^* \longrightarrow \mathbb{Z}_8^*,\ \Phi(x) = x^5$

e. $\Phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ \Phi(x) = x^3$ **f.** $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \Phi(x) = x^3$

11. $G = \{\sigma \in \mathcal{S}_8 : \sigma(8) = 8\} \leq \mathcal{S}_8$ ve $G \cong \mathcal{S}_7$ olduğunu kanıtlayınız.

12. $G \ncong G'$, fakat $Oto(G) \cong Oto(G')$ olacak biçimde G ve G' grupları bulunuz.

13. Alıştırma 8.5 teki kuaterniyonlar grubunun iç otomorfizmlerini bulunuz.

14. Her $n \in \mathbb{N}$ için, mertebesi n olan grupların oluşturduğu küme $\mathcal{G}_n$ olsun. İzomorf olma bağıntısı, $\cong$, nın $\mathcal{G}_n$ içinde bir denklik bağıntısı olduğunu ve bu denklik bağıntısının $\mathcal{G}_n$ yi sonlu sayıda denklik sınıfına ayırdığını gösteriniz.

15. Sonlu permütasyon grupları için doğruluğu kanıtlanmış bir önermenin tüm sonlu gruplar için de doğru olduğu söylenebilir mi? Neden?