ALIŞTIRMALAR 8

1. Aşağıda verilenler için $N \lhd G$ olduğunu gösteriniz.

a. $N = \{d_0, d_1, d_2, d_3\}$, $G = \mathcal{D}_4$ **b.** $N = SL(2, \mathbb{R})$, $G = GL(2, \mathbb{R})$

2. $\{A \in GL(2, \mathbb{R}) : detA = 3^k, \ k \in \mathbb{Z}\} \lhd GL(2, \mathbb{R})$ olduğunu gösteriniz.

3. G bir grup, $N \trianglelefteq G$ olsun. Eğer N devirli ise, N nin her altgrubunun da G içinde normal olduğunu gösteriniz.

4. $H = \{\imath, (1\ 2)(3\ 4)\}$ ise, $H \leq \mathcal{A}_4$, fakat $H \ntriangleleft \mathcal{A}_4$ olduğunu gösteriniz.

5. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $G = \{I, \ -I, \ A, \ -A, \ B, \ -B, \ C, \ -C\}$ nin matris çarpma işlemine göre bir grup olduğunu gösterip, çarpım tablosunu yapınız. G nin tüm altgruplarını belirleyiniz ve G Abel grubu olmamasına rağmen G nin her altgrubunun bir normal altgrup olduğunu gösteriniz. Bu grup, *kuaterniyonlar grubu* olarak bilinir ve $\mathcal{Q}_4$ ile gösterilir.

6. Almaşık grup $\mathcal{A}_4$ ün, mertebesi 6 olan altgrubu bulunmadığını kanıtlayınız. (*İpucu:* Böyle bir altgrup $H \leq \mathcal{A}_4$ bulunsaydı, $(\mathcal{A}_4 : H) = 2$ ve dolayısıyla, $H \lhd \mathcal{A}_4$ olması gerekir; $|\mathcal{A}_4/H| = 2$ olacağından, her $\alpha \in \mathcal{A}_4$ için $\alpha^2 H = H$, yani $\alpha^2 \in H$ olması gerekirdi. $S = \{\alpha^2 : \alpha \in \mathcal{A}_4\}$ kümesinin eleman sayısına bakınız.)

7. $\mathbb{Z}_{12}$ nin $< 6 > = \{0, 6\}$ altgrubu için $\mathbb{Z}_{12} \ / < 6 >$ bölüm grubunun tüm elemanlarını ve işlem tablosunu belirleyiniz.

8. G/N bölüm grubunda, $xN = yN$ olduğu halde $|x| \neq |y|$ olabileceğini bir örnekle gösteriniz.

9. G bir grup, $H \leq G$ olsun. Eğer her $x \in G$ için $x^2 \in H$ ise,

$H \trianglelefteq G$ olduğunu ve bu durumda, G/H bölüm grubunun bir Abel grubu olduğunu gösteriniz. (*İpucu:* $x \in G$, $h \in H$ için $xhx^{-1} = (xh)^2 h^{-1}(x^{-1})^2$ dir.)

10. G bir sonlu grup, $N \trianglelefteq G$ ve $x \in G$ olsun. xN nin G/N içindeki mertebesinin, x in G içindeki mertebesini böldüğünü kanıtlayınız. $(|x|, |G/N|) = 1$ ise, $x \in N$ olduğunu gösteriniz.

11. G, bir grup; $N \triangleleft G$ olsun. Aşağıdakileri kanıtlayınız.

a. G, Abel grubu ise, G/N de bir Abel grubudur.

b. G, devirli grup ise, G/N de bir devirli gruptur.

12. G bir grup, $|G| = 2^r$, $r \geq 2$; $x \in G$, $|x| = 2^{r-1}$ olsun. $x^{2^{r-2}} \in M(G)$ olduğunu gösteriniz.

13. $\mathcal{S}_3$ ve $\mathcal{D}_4$ ün eşleniklik sınıflarını belirleyiniz, sınıf denklemlerini yazınız.