BÖLÜM 8

NORMAL ALTGRUPLAR VE BÖLÜM GRUPLARI

Bu bölümü bitirdiğinizde,

- bir grubun ikili işleminin eşkümelere taşınabilirliği
- normal altgrup kavramı
- bir altgrubun normalleyicisi
- bölüm grubu
- komütatörler altgrubu
- eşlenik sınıfları, sınıf denklemi

hakkında bilgi sahibi olabileceksiniz.

BÖLÜM 8

NORMAL ALTGRUPLAR VE BÖLÜM GRUPLARI

Bundan önceki bölümde, bir grubun herhangi bir altgrubuna göre sol eşkümelerinin o grubun bir parçalanışını oluşturduğunu ve dolayısıyla bir denklik bağıntısı verdiğini görmüş ve grubun ikili işleminin, böylece ortaya çıkan denklik sınıflarına, yani sol eşkümelere, taşınabilip taşınamayacağını sormuştuk. Bu bölümde bu soruyu yanıtlayacağız.

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H nin G içindeki sol eşkümelerinin oluşturduğu kümeyi, önceki bölümde olduğu gibi, $Sol(H)$ ile gösterelim. G nin ikili işleminin sol eşkümelere taşınabilmesi için gerek ve yeter koşulun, $x, y, a, b \in G$ olmak üzere

$$xH = aH \ , \ yH = bH \Longrightarrow (xy)H = (ab)H \tag{1}$$

olduğunu biliyoruz.

Eğer G bir Abel grubu ise, (1) koşulunun G nin her altgrubu için sağlandığı, Önerme 7.2(iv) kullanılarak görülebilir. Ancak, G, Abel grubu değilse, (1) koşulunun sağlanmadığı durumlar vardır.

Örnek 1. $G = \mathcal{D}_4$, $H = \{d_0, t_1\}$ alalım. H nin G içindeki sol eşkümeleri Örnek 7.2'de belirlenmiş ve

$$d_1H = k_2H \quad , \quad d_3H = k_1H$$

olduğu görülmüştü. $d_1d_3 = d_0$ ve $k_2k_1 = d_2$ olduğundan

$$(d_1d_3)H \neq (k_2k_1)H$$

dir. Böylece, (1) koşulu sağlanmamaktadır. Başka bir deyişle, $\mathcal{D}_4$ ün ikili işlemi, H nin $\mathcal{D}_4$ içindeki sol eşkümelerine taşınamaz. □

(1) koşulunun hangi durumlarda sağlandığı, yani bir grup içindeki ikili işlemin hangi altgrupların sol eşkümelerine taşınabildiği sorusu aşağıdaki teoremde yanıtlanmaktadır.

Teorem 1. *G bir grup ve $H \leq G$ ise, aşağıdaki önermeler denktir:*

(i) *G nin ikili işlemi, H nin sol eşkümelerine taşınabilir.*

(ii) *Her $x \in G$ için $xH = Hx$ dir.*

(iii) *Her $x \in G$ için $xHx^{-1} = H$ dir.*

(iv) *Her $x \in G$ için $xHx^{-1} \subseteq H$ dir.*

Kanıt $(i) \Longrightarrow (ii)$ G nin ikili işleminin $Sol(H)$ ye taşınabildiğini, yani (1) koşulunun sağlandığını varsayalım. $x \in G$ ve $z \in xH$ alalım. Önerme 7.2(iii) ye göre, $zH = xH$ dir. Diğer yandan, $x^{-1}H = x^{-1}H$ olduğundan, varsayımımıza göre

$$zH = xH, x^{-1}H = x^{-1}H \Longrightarrow (zx^{-1})H = (xx^{-1})H = H \Longrightarrow zx^{-1} \in H$$

ve buradan da $z \in Hx$ olduğu görülür. Demek ki, her $x \in G$ için $xH \subseteq Hx$ dir. Her $x \in G$ için $x^{-1} \in G$ olduğundan, $x^{-1}H \subseteq Hx^{-1}$ olduğunu da söyleyebiliriz. Şimdi Önerme 7.1(iii) ve (iv) uygulanarak, $Hx \subseteq xH$ olduğu görülür:

$$\begin{aligned} x^{-1}H \subseteq Hx^{-1} &\Longrightarrow x(x^{-1}H) \subseteq x(Hx^{-1}) \\ &\Longrightarrow H \subseteq (xH)x^{-1} \Longrightarrow Hx \subseteq ((xH)x^{-1})x = xH. \end{aligned}$$

Böylece, $xH = Hx$ dir.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Her $x \in G$ için $xH = Hx$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$xH = Hx \Longrightarrow (xH)x^{-1} = (Hx)x^{-1} = H \Longrightarrow xHx^{-1} = H.$$

$(iii) \Longrightarrow (iv)$ Aşikâr.

$(iv) \Longrightarrow (i)$ Her $x \in G$ için $xHx^{-1} \subseteq H$ olsun. $x, y, a, b \in G$ olmak üzere $xH = aH$ ve $yH = bH$ olsun. Bu takdirde, $a^{-1}x \in H$ ve

$b^{-1}y \in H$ dir. Buradan, $b^{-1}a^{-1}xb \in b^{-1}Hb \subseteq H$ ve

$$(ab)^{-1}(xy) = (b^{-1}a^{-1})(xy) = (b^{-1}a^{-1}xb)(b^{-1}y) \in H,$$

yani $(xy)H = (ab)H$ olduğu görülür. Bu, G nin ikili işleminin $Sol(H)$ ye taşınabilir olduğunu gösterir. ∎

Tanım 1. G bir grup, $H \leq G$ olsun. Eğer Teorem 1 in denk koşulların- dan biri sağlanıyorsa, H ye G nin bir *normal altgrubu* denir ve $H \trianglelefteq G$ yazılır. Eğer H , G nin bir özaltgrubu ve $H \trianglelefteq G$ ise, $H \triangleleft G$ yazacağız. □

Bir grup içinde bir altgrubun normal altgrup olup olmadığı araştırılırken, Teorem 1 deki denk koşullardan herhangi biri kullanılabilir. Aşağıdaki örneklerin çoğunda eşküme sayısı küçük olduğundan, Teorem 1 in diğer koşulları da kolay uygulanabilir; ancak, genel tartışmalarda uygulamaya en elverişli koşul, Teorem 1 in (iv) koşuludur:

$$\begin{aligned} H \trianglelefteq G &\iff \text{her } x \in G \text{ için } xHx^{-1} \subseteq H \\ &\iff \text{her } x \in G \text{ ve } h \in H \text{ için } xhx^{-1} \in H. \end{aligned}$$

Örnek 2. $G = \mathcal{D}_4$ ve $H = \{d_0, t_1\}$ için Örnek 1'de, Teorem 1 in ilk koşulunun sağlanmadığını görmüştük. O halde, $H = \{d_0, t_1\}$, $\mathcal{D}_4$ ün normal altgrubu değildir. Bununla beraber, $N = \{d_0, d_2\}$ için

$$d_0N = d_2N = N = Nd_0 = Nd_2 \quad , \quad d_1N = \{d_1, d_3\} = d_3N = Nd_3 = Nd_1$$

$$t_1N = \{t_1, t_2\} = t_2N = Nt_2 = Nt_1 \ , \ k_1N = \{k_1, k_2\} = k_2N = Nk_2 = Nk_1$$

ve dolayısıyla, $N \triangleleft \mathcal{D}_4$ tür. □

Örnek 3. G, herhangi bir grup ve $M = M(G)$, G nin merkezi ise, her $x \in G$ ve $m \in M$ için $xmx^{-1} = m \in M$ olduğundan, $M \trianglelefteq G$ dir. □

Örnek 4. G, bir Abel grubu ise, her $H \leq G$ ve her $x \in G$ için $xH = Hx$ olacağından, $H \trianglelefteq G$ dir. Başka bir deyişle, bir Abel grubunun her altgrubu o grubun bir normal altgrubudur. □

Örnek 5. Her G grubu için $\{e\} \trianglelefteq G$ ve $G \trianglelefteq G$ olduğu açıktır.

Çünkü, her $x \in G$ için $x\{e\}x^{-1} = \{e\}$ ve $xGx^{-1} = G$ dir. $\square$

Teorem 1 in (iv) koşulunu sadece bir üreteçler kümesi üzerinde uygulamak yeterlidir. Daha açık bir ifade ile, eğer G bir grup, $S \subseteq G$ ve $H =< S >$ ise, $H \trianglelefteq G$ olması için gerek ve yeter koşul, her $x \in G$ ve $s \in S$ için $xsx^{-1} \in H$ olmasıdır(Bunu kanıtlayınız).

Örnek 6. G, bir grup, $K = \{a^{-1}b^{-1}ab : a, b \in G\}$, $G' =< K >$ olsun. Bu takdirde, $G' \trianglelefteq G$ dir. Gerçekten, her $x \in G$ ve her $a^{-1}b^{-1}ab \in K$ için,

$$x(a^{-1}b^{-1}ab)x^{-1} = [(ax^{-1})^{-1}b^{-1}(ax^{-1})b][b^{-1}(x^{-1})^{-1}b(x^{-1})] \in G'$$

olduğu kolayca görülebilir. $\square$

Tanım 2. Örnek 6'da tanımlanan K kümesinin her bir elemanına G nin bir *komütatör*ü ve G' ye de G nin *komütatörler altgrubu* denir. $\square$

G grubunun Abel grubu olması için gerek ve yeter koşul, $G' = \{e\}$ olmasıdır. Bu bakımdan, G' komütatörler altgrubu, G nin Abel grubu olmaktan ne kadar uzak olduğunun bir göstergesidir.

Aşağıdaki iki önerme, normal altgrup örneklerimizi çoğaltmamıza yardımcı olabilir.

Önerme 1. *G bir grup , $H \leq G$ ve $(G : H) = 2$ ise, $H \trianglelefteq G$ dir.*

Kanıt. $(G : H) = 2$ olduğundan, H nin G içinde tam 2 tane sol eşkümesi vardır: H ve $G \backslash H$. Her $a \in G \backslash H$ için $aH = G \backslash H$ dir. Şimdi, her $x \in G$ için $xHx^{-1} \subseteq H$ olduğunu gösterelim. $x \in H$ ise, $xHx^{-1} \subseteq H$ olduğu açıktır. $x \notin H$ ise, $x^{-1} \notin H$ ve $(xHx^{-1}) \cap xH = \emptyset$ dir; çünkü, aksi halde, $h, h_1 \in H$ olmak üzere

$$xhx^{-1} = xh_1 \Longrightarrow x^{-1} = h^{-1}h_1 \in H$$

çelişkisi ortaya çıkardı. O halde $xHx^{-1} \subseteq H$ dir. $\blacksquare$

Örnek 7. Her $n \geq 3$ için n-inci almaşık grup $\mathcal{A}_n$ nin n-inci simetrik grup $\mathcal{S}_n$ içindeki indeksi 2 dir. Böylece, $\mathcal{A}_n \lhd \mathcal{S}_n$ dir. $\square$

Önerme 2. *G bir grup; J, boş olmayan bir küme, her $j \in J$ için $N_j \trianglelefteq G$ ve $N = \bigcap\limits_{j \in J} N_j$ olsun. Bu takdirde, $N \trianglelefteq G$ dir. Başka bir deyişle, bir grup içinde bir normal altgruplar ailesinin kesişimi yine bir normal altgruptur.*

Kanıt. $x \in G$, $a \in N$ alalım. Bu takdirde, her $j \in J$ için $a \in N_j$ olur, ve $N_j \trianglelefteq G$ olduğundan, $xax^{-1} \in N_j$ ve bunun sonucu olarak, $xax^{-1} \in \bigcap\limits_{j \in J} N_j = N$ olur. Bu, kanıtı tamamlar. ∎

G, bir grup, $H \leq G$ olsun. H, G nin normal altgrubu olmasa da G nin, H yi normal altgrup kabul eden altgrupları vardır. Örneğin, $H \trianglelefteq H$ dir. Aşağıdaki tanımı, bu bağlamda değerlendiriniz.

Tanım 3. G, bir grup, $H \leq G$ olsun. Bu takdirde,

$$N_G(H) = \{x \in G : xHx^{-1} = H\}$$

kümesine H nin G içindeki *normalleyici*si denir. $\square$

Önerme 3. *G, bir grup, $H \leq G$ olsun. Bu takdirde,*

(i) $N_G(H) \leq G$ ve $H \trianglelefteq N_G(H)$ dir.

(ii) $K \leq G$ ve $H \trianglelefteq K$ ise, $K \subseteq N_G(H)$ dir.

(iii) $H \trianglelefteq G \Longleftrightarrow N_G(H) = G$.

Kanıt. *(i)* $H \subseteq N_G(H)$ olduğu açıktır. $x, y \in N_G(H)$ alalım. Normalleyici tanımından, $xHx^{-1} = H$ ve $yHy^{-1} = H$ dir. Buradan, $(xy)H(xy)^{-1} = x(yHy^{-1})x^{-1} = xHx^{-1} = H$ ve $x^{-1}Hx = H$ olduğu görülür. Böylece, $N_G(H) \leq G$ ve $H \leq N_G(H)$ olduğu kanıtlanmış olur. $H \trianglelefteq N_G(H)$ olduğu, $N_G(H)$ nin tanımından görülür. *(ii)* ve *(iii)* nin kanıtını okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz. ∎

Şimdi, tekrar başa dönerek, *normal altgrup* kavramının nasıl ortaya çıktığını anımsayalım. Bu kavram, bir grubun ikili işleminin bir altgruba göre sol eşkümelere taşınabilip taşınamayacağı sorusu ile ortaya çıkmıştı. Bu sorunun yanıtı olumlu ise ki bu, Teorem 1 deki denk koşullardan biridir, o zaman söz konusu altgruba bir normal altgrup denilmektedir.

$N \trianglelefteq G$ olunca, N nin G içindeki her sol eşkümesi bir sağ eşküme ve her sağ eşkümesi bir sol eşkümedir. Bu nedenle, $N \trianglelefteq G$ olunca, "sağ" ve "sol" öneklerini atarak N nin G içindeki eşkümelerinden söz edebiliriz. Bu durumda, N nin G içindeki eşkümelerinden oluşan kümeyi G/N ile göstereceğiz; her $x \in G$ için $xN = Nx$ olduğunu unutmadan, eşkümeleri sol eşküme olarak göstermeğe devam edeceğiz:

$$N \trianglelefteq G \text{ için } G/N = \{xN : x \in G\}.$$

Teorem 1 e veya Tanım 1 e göre, $N \trianglelefteq G$ olunca, G nin ikili işlemi, G/N ye taşınabilir. Bundan böyle, $N \trianglelefteq G$ olunca, aksi ifade edilmedikçe, G/N nin ikili işlemi olarak daima G den taşınan ikili işlem anlaşılacaktır:

$$xN,\ yN \in G/N \text{ için } (xN)(yN) = (xy)N. \tag{2}$$

Teorem 2. *G bir grup ve $N \trianglelefteq G$ ise, G/N bir gruptur.*

Kanıt. Önce birleşme özelliğine bakalım. $xN,\ yN,\ zN \in G/N$ alalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}(xN)((yN)(zN)) &= (xN)((yz)N) = (x(yz))N \\ &= ((xy)z)N = ((xy)N)(zN) = ((xN)(yN))(zN),\end{aligned}$$

birleşme özelliğinin var olduğunu gösterir. G nin birim elemanı e ise, her $xN \in G/N$ için $(xN)(eN) = xN = (eN)(xN)$ dir. Buradan görülür ki, $eN = N$, G/N nin birim elemanıdır. Ayrıca, $(xN)(x^{-1}N) = eN = (x^{-1}N)(xN)$ den her $xN \in G/N$ için $(xN)^{-1} = (x^{-1}N) \in G/N$ olduğu görülür. Sonuç olarak, G/N bir gruptur. ■

Tanım 4. G bir grup; $N \trianglelefteq G$ ise, G/N grubuna *G nin N ye göre bölüm grubu* denir. □

G/N bölüm grubundaki her xN elemanı ve herhangi bir k tamsayısı için $(xN)^k = (x^k)N$ olduğuna dikkat ediniz!

Daha önceki tanımlarımıza göre, $N \trianglelefteq G$ ise, G/N nin mertebesi, N nin G içindeki indeksi; yani $|G/N| = (G:N)$ dir. Böylece, Teorem 7.1 den

$$|G| = |G/N| \cdot |N|$$

dir. Özel olarak, $|G| < \infty$ ise, $|G/N| = |G|/|N|$ dir.

Bu bölümün başından beri, tüm tanımlarımızı ve önermelerimizi genel gösterimimiz olan çarpımsal gösterimle verdik. Daha önce de çeşitli vesilelerle belirttiğimiz gibi, okuyucunun, tüm tanım ve önermelerin toplamsal gösterimde nasıl ifade edileceğini düşünmesi yararlı olur. Örneğin, toplamsal gösterimde, $H \leq G$ nin $x \in G$ tarafından belirlenen sol eşkümesi

$$x + H = \{\ x + h\ :\ h \in H\ \}$$

biçimini alır. Bu bağlamda, G toplamsal grup ve $N \trianglelefteq G$ ise, G/N nin ikili işlemi

$$(x+N) + (y+N) = (x+y) + N$$

ile verilen toplama işlemi olur.

Örnek 8. Tamsayılar grubu $\mathbb{Z}$ nin $N = 4\mathbb{Z}$ altgrubunun $\mathbb{Z}$ içindeki eşkümelerini [0]=$4\mathbb{Z}$, [1]=$1+4\mathbb{Z}$, [2]=$2+4\mathbb{Z}$, [3]=$3+4\mathbb{Z}$ ile gösterelim. O zaman, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nin işlem tablosu yanda verildiği gibidir.

	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

□

Bölüm grubu kavramı, gruplarla ilgili en önemli kavramlardan biridir. G bir sonlu grup ve $N \triangleleft G$, $N \neq \{e\}$ ise, G/N bölüm grubu, G den daha küçüktür ve G/N nin yapısı, çoğu durumlarda, G nin yapısından daha az karmaşıktır. Dolayısıyla, G/N bölüm grubu, tıpkı 3,14 ün π sayısına yaklaşım olarak alındığı gibi, G ye bir yaklaşım olarak düşünülebilir. Böylece, G/N nin bazı özelliklerine bakarak G hakkında bazı özellikler elde edebiliriz. Bu bölümü, bu doğrultuda üç uygulama ile kapatacağız.

İlk uygulama, gruplarda merkez kavramı ile ilgilidir. Örnek 3'te, bir grubun merkezinin daima o grubun bir normal altgrubu olduğunu görmüştük. O halde, G grubunun merkezi $M = M(G)$ ise, G/M tanımlıdır.

Teorem 3. *Merkezi M olan bir G grubu için $|G/M| > 1$ ise, G/M devirli olamaz.*

Kanıt. İddianın aksine, G/M nin devirli olduğunu varsayalım ve $G/M =< zM >$, $z \in G$ olsun. $x, y \in G$ alalım. Bu takdirde,

$$xM = z^iM \quad , \quad yM = z^jM$$

olacak biçimde $i, j \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece, $x = z^ia$ ve $y = z^jb$ olacak biçimde $a, b \in M$ vardır. Şimdi

$$xy = z^i(az^j)b = z^i(z^ja)b = z^{j+i}(ab) = z^j((z^ia)b) = z^j(b(z^ia)) = yx$$

ve buradan, G nin bir Abel grubu olduğu görülür. Bu durumda, $G = M$ ve $|G/M| = |G/G|$=1 olması gerekir. Bu çelişki, kanıtı tamamlar. ∎

G bir grup, G nin merkezi M olsun. Her $N \leq M$ için $N \trianglelefteq G$ olduğu kolayca görülebilir. Eğer $N \leq M$ için G/N devirli ise, yukarıdaki kanıt tekrarlanarak, G nin bir Abel grubu olduğu gösterilebilir.

Bölüm grupları ile ilgili ikinci uygulama, G nin komütatörler altgrubu, G', ile ilgilidir. Örnek 6'da, $G' \trianglelefteq G$ olduğunu görmüştük. Dolayısıyla, G/G' tanımlıdır.

Teorem 4. *Her G grubu için G/G' bir Abel grubudur. Eğer $N \trianglelefteq G$ ise, G/N nin Abel grubu olması için gerek ve yeter koşul, $G' \leq N$ olmasıdır.*

Kanıt. Her $x, y \in G$ için, $x^{-1}y^{-1}xy \in G'$ olduğundan, $xyG' = yxG'$

ve böylece, $(xG')(yG') = xyG' = yxG' = (yG')(xG')$, yani G/G' nün Abel grubu olduğu görülür. $N \trianglelefteq G$ olsun. Eğer G/N Abel grubu ise, her $x, y \in G$ için $(xy)N = (yx)N$ olacağından, $x^{-1}y^{-1}xy \in N$ dir. O halde, $G' \leq N$ dir. Karşıt olarak, $G' \leq N$ ise, her $x, y \in G$ için $x^{-1}y^{-1}xy \in N$ ve dolayısıyla, $(xN)(yN) = (xy)N = (yx)N = (yN)(xN)$ olur; yani G/N bir Abel grubudur. ■

Bölüm grupları ile ilgili üçüncü uygulamayı vermek için yeni bir kavram tanımlayacağız.

Tanım 5. G bir grup; $a, b \in G$ olsun. Eğer $b = xax^{-1}$ olacak biçimde bir $x \in G$ varsa, o zaman, b, a nın bir *eşleniği*dir denir. □

G üzerinde, "$a\beta b \iff b, a$ nın bir eşleniğidir." ile tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır(Bunu gösteriniz).

Tanım 6. Yukarıda tanımlanan bağıntıya, G içinde *eşleniklik bağıntısı* denir. Bu bağıntı ile ortaya çıkan denklik sınıflarına, G içinde *eşleniklik sınıfları* denir. □

$a \in G$ için a nın temsil ettiği eşleniklik sınıfını $[a]_\beta = \varepsilon_a$ ile göstereceğiz:

$$\varepsilon_a = \{xax^{-1} : x \in G\}.$$

Birim eleman $e \in G$ için $\varepsilon_e = \{xex^{-1} : x \in G\} = \{e\}$ olduğu açıktır. Bir eşleniklik sınıfının kardinalitesi ile ilgili olan aşağıdaki önerme, bundan sonrası için önemli bir adımdır.

Önerme 4. *G bir grup ve $a \in G$ ise, $|\varepsilon_a| = (G : M_G(a))$ dır.*

Kanıt. Daha önce tanımladığımız $M_G(a) = \{\ x \in G\ :\ ax = xa\ \}$ nın G içindeki sol eşkümelerinden oluşan küme $Sol(M_G(a))$ olmak üzere

$$f : \varepsilon_a \to Sol(M_G(a))\ ,\ f(xax^{-1}) = xM_G(a),$$

iyi tanımlı, örten bir fonksiyon verir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} xM_G(a) = yM_G(a) &\implies y^{-1}x \in M_G(a) \\ &\implies ay^{-1}x = y^{-1}xa \implies yay^{-1} = xax^{-1} \end{aligned}$$

olduğundan, f, bire-birdir ve $|\varepsilon_a| = |Sol(M_G(a))| = (G : M_G(a))$ olduğu görülür. ∎

Sonuç 1. *G bir grup ve $a \in G$ ise, $\varepsilon_a = \{a\} \iff a \in M(G)$ dir.*

Kanıt. $\varepsilon_a = \{a\} \iff |\varepsilon_a| = 1 \iff G = M_G(a) \iff a \in M(G)$. ∎

Şimdi, G nin bir sonlu grup olduğunu kabul edelim. O zaman, G nin eşleniklik sınıflarının sayısı da sonlu olur. G nin, s tane eşleniklik sınıfı bulunduğunu düşünelim: $\varepsilon_{a_1}, \varepsilon_{a_2}, \ldots, \varepsilon_{a_s}$. Bu eşleniklik sınıflarından ilk r tanesinin tek elemanlı olduğunu kabul edebiliriz. Önerme 4 ün sonucundan, $M(G) = \{a_1, \cdots, a_r\}$, $r = |\varepsilon_{a_1}| + \cdots + |\varepsilon_{a_r}| = |M(G)|$ ve

$$|G| = |M(G)| + |\varepsilon_{a_{r+1}}| + \cdots + |\varepsilon_{a_s}| \tag{3}$$

olur. (3) denklemi, G nin *sınıf denklemi* olarak bilinir.

Önerme 5. *G bir sonlu grup, p bir asal sayı ve $r \geq 1$ olmak üzere $|G| = p^r$ olsun. Bu takdirde, $|M(G)| \geq p$ dir.*

Kanıt. G, Abel grubu ise, $|M(G)| = |G| = p^r$ dir ve iddia açıktır. G, Abel değilse, G nin sınıf denklemi (3)'te, $r < s$ dir. Önerme 4 e göre $|\varepsilon_{a_i}| = (G : M_G(a_i))$, ve Lagrange Teoremi'ne göre de $|\varepsilon_{a_i}|$, G nin mertebesi olan p^r yi böler. Her $i > r$ için $|\varepsilon_{a_i}| > 1$ olduğundan, $p \mid |\varepsilon_{a_i}|$ olması gerekir. G nin sınıf denklemine bakılınca, $p \mid |M(G)|$ olduğu görülür. $|M(G)| \geq 1$ olduğundan, $|M(G)| \geq p$ dir. ∎

Teorem 5. *Mertebesi bir asal sayının karesi olan her grup bir Abel grubudur.*

Kanıt. p, bir asal sayı, G bir grup ve $|G| = p^2$ olsun. Önerme 5 e göre $|M(G)| \geq p$ dir. Lagrange Teoremi'nden, $|M(G)| = p$ veya $|M(G)| = p^2$ dir. $|M(G)| = p$ olsaydı, $|G/M(G)| = p$ ve Lagrange Teoremi'nin üçüncü sonucundan, $G/M(G)$ nin devirli olması gerekirdi. Teorem 3 e göre, $G/M(G)$, mertebesi p olan bir devirli grup olamaz. O halde, $|M(G)| \neq p$; dolayısıyla, $|M(G)| = p^2 = |G|$, $M(G) = G$ ve G bir Abel grubudur. ∎