

CEVAPLAR

ALIŞTIRMALAR 7

1. Sol eşkümeler: $1H = \{1, (1\ 2)\} = (1\ 2)H$, $(1\ 3)H = \{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\} = (1\ 2\ 3)H$, $(2\ 3)H = \{(2\ 3), (1\ 3\ 2)\} = (1\ 3\ 2)H$

3. \mathbb{Z} içinde, $6\mathbb{Z}$ nin 6 sol eşkümüsi vardır: $0 + 6\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$, $1 + 6\mathbb{Z}$, $2 + 6\mathbb{Z}$, $3 + 6\mathbb{Z}$, $4 + 6\mathbb{Z}$, $5 + 6\mathbb{Z}$.

a. $11 + 6\mathbb{Z} = 17 + 6\mathbb{Z}$ b. $1 + 6\mathbb{Z} = 7 + 6\mathbb{Z}$ c. $7 + 6\mathbb{Z} \neq 35 + 6\mathbb{Z}$

5. \mathbb{Z}_{18} içinde $\langle 6 \rangle$ nin tam 6 sol eşkümüsi vardır: $0 + 6\mathbb{Z}_{18} = 6\mathbb{Z}_{18}$, $1 + 6\mathbb{Z}_{18}$, $2 + 6\mathbb{Z}_{18}$, $3 + 6\mathbb{Z}_{18}$, $4 + 6\mathbb{Z}_{18}$, $5 + 6\mathbb{Z}_{18}$.

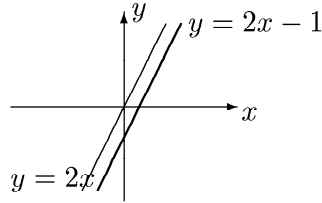
a. $11 + \langle 6 \rangle = 17 + \langle 6 \rangle$ b. $5 + \langle 6 \rangle \neq 7 + \langle 6 \rangle$

7. a. $(2, 3) + H = \{(t+2, 2t+3) : t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x, 2x - 1) : x \in \mathbb{R}\}$.

b. Denklemi $y = 2x$ olan doğruya paralel doğrular.

c. $K = \{(x, 2x - 1) : x \in \mathbb{R}\}$, $(2, 1) + K$ eşkümüsi.



9. Mertebesi 5 olan bir grup içinde mertebesi 2 olan bir eleman bulunamaz.

11. $|G| = 65$, $H < G \implies |H| \in \{1, 5, 13\} \implies H$ devirli. Daha genel olarak, p ve q iki farklı asal sayı, $|G| = pq$, $H < G$ ise, $|H| \in \{1, p, q\}$ ve dolayısıyla, H devirlidir.

13. $\varphi(7) = 6 \implies 5^6 \equiv 1 \pmod{7} \implies 5^{18} \equiv 1 \pmod{7}$. Diğer yandan, $5^2 \equiv 4 \pmod{7}$ ve $5^4 \equiv 2 \pmod{7}$. Dolayısıyla, $5^{22} \equiv 1 \pmod{7}$. Benzer şekilde, $\varphi(36) = 12$, $7^{12} \equiv 1 \pmod{36}$, $7^{24} \equiv 1 \pmod{36}$ ve böylece, $7^{25} \equiv 7 \pmod{36}$.

15. p asal, $|G| = p^2$ ve G devirli değilse, her $x \in G \setminus \{e\}$ için $|x| = p$ dir. Dolayısıyla, G nin mertebesi p olan tam $\frac{p^2-1}{p-1} = p+1$ altgrubu vardır; $\{e\}$ ve G ile birlikte tam $p+3$ tane altgrup.

17. $|G| = 33$ ise, G nin elemanlarının mertebeleri 1, 3, 11, 33 olabilir. G devirli ise, G nin mertebesi 3 olan eleman(lar)ı vardır. G devirli değilse, G nin mertebesi 11 olan (devirli) altgruplarının sayısı en çok 3 olabilir. Bu nedenle, G içinde mertebesi 11 olan elemanların sayısı en çok 30 olabilir; mertebesi 3 olan elemanlar vardır.

19. $|G| = 2p$, p asal olsun. G değişmeli değilse, G nin öyle bir elemanı vardır ki $|x| = p$ dir. $y \in G \setminus \langle x \rangle$ ise, $G = \langle x \rangle \cup y \langle x \rangle$, G nin bir parçalanışı olur. Böyle bir y için $y^2 \notin y \langle x \rangle$, çünkü, $y^2 \in y \langle x \rangle$ olması halinde $y \in \langle x \rangle$ olur. O halde, $y^2 \in \langle x \rangle$ dir. Bu durumda, $y^2 = e$ olması gerekir, çünkü aksi halde. $|y| = 2p$ olurdu. Böylece, her $y \in G \setminus \langle x \rangle$ için $|y| = 2$ dir.

21.

