

ALIŞTIRMALAR 7

1. \mathcal{S}_3 içinde, $H = \{1, (1\ 2)\}$ altgrubunun tüm sol ve sağ eşkümelerini bulunuz (Çevrim gösterimi ile veya Örnek 5.1 deki tabloyu kullanarak hesap yapabilirsiniz).

2. \mathcal{D}_4 içinde, $H = \{d_0, d_1, d_2, d_3\}$ altgrubunun tüm sol ve sağ eşkümelelerini bulunuz.

3. \mathbb{Z} içinde, $6\mathbb{Z} = \{0, \pm 6, \pm 12, \dots\}$ altgrubunun tüm sol eşkümelelerini bulunuz. Ayrıca, aşağıda her şıkta verilen iki eşkümenin eşit olup olmadığını belirleyiniz:

a. $11 + 6\mathbb{Z}$, $17 + 6\mathbb{Z}$ b. $1 + 6\mathbb{Z}$, $7 + 6\mathbb{Z}$ c. $7 + 6\mathbb{Z}$, $35 + 6\mathbb{Z}$

4. $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ verilmiş olsun. $n\mathbb{Z}$ nin \mathbb{Z} içindeki tüm sol eşkümelerini bulunuz. Kaç tane buldunuz?

5. \mathbb{Z}_{18} içinde $\langle 6 \rangle = \{0, 6, 12\}$ nin tüm sol eşkümelerini bulunuz. Ayrıca, aşağıda her şıkta verilen iki eşkümenin eşit olup olmadığını belirleyiniz.

a. $11 + \langle 6 \rangle$, $17 + \langle 6 \rangle$ b. $5 + \langle 6 \rangle$, $7 + \langle 6 \rangle$

6. \mathbb{Z}_{30}^* içinde, $H = \{1, 11\}$ in tüm sol eşkümelerini bulunuz.

7. \mathbb{R}^2 toplamsal grubu içinde, $H = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$ altgrubunu düşününüz. (Kartezyen düzlemde H , $y = 2x$ doğrusundan başka bir şey değildir.)

a. $(2, 3) + H$ nin $(2, 3)$ noktasından geçen ve $y = 2x$ doğrusuna paralel olan doğru olduğunu gösteriniz.

b. H nin herhangi bir sol eşkümesi hakkında ne söyleyebilirsiniz?

c. Düzlemde, $2x - 3y = 1$ denklemi ile verilen doğru, \mathbb{R}^2 nin bir K

altgrubunun bir sol eşkumesidir. K yi bulunuz.

8. \mathbb{C}^* in $H = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$ altgrubunun (tüm) sol eşkümelerini geometrik olarak yorumlayınız.

9. Grup tanımındaki (g.1), (g.2), (g.3) koşullarından hiçbirine bakmadan yanda tablosu verilen ikili işlemin neden asla bir grubun ikili işlemi olamayacağını söyleyiniz.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	c	d	b
b	b	d	e	a	c
c	c	b	d	e	a
d	d	c	a	b	c

10. G bir grup; H , G nin bir özaltgrubu; K da H nin bir özaltgrubu olsun. Eğer $|K| = 30$ ve $|G| = 300$ ise, H nin mertebesinin alabileceği değerler nelerdir?

11. Mertebesi 65 olan bir grubun her özaltgrubunun devirli olduğunu gösteriniz. Daha genel olarak, p ve q iki farklı asal sayı ise, mertebesi pq olan bir grubun her özaltgrubunun devirli olduğunu gösteriniz.

12. Teorem 2, Sonuç 3 ü kullanarak, her $x \in \mathbb{Z}_n^*$ için $x^{\varphi(n)} = 1$ olduğunu; dolayısıyla, n ile aralarında asal olan her $a \in \mathbb{Z}$ için $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ olduğunu kanıtlayınız (*Euler Teoremi*).

13. $5^{22} \equiv a \pmod{7}$ ve $7^{25} \equiv b \pmod{36}$ olan $a \in \mathbb{Z}_7$ ve $b \in \mathbb{Z}_{36}$ bulunuz.

14. G bir grup, p bir asal sayı olsun. Eğer G nin, mertebesi p olan tam m tane altgrubu varsa; G nin, mertebesi p olan tam $m(p-1)$ elemanı bulunduğunu kanıtlayınız.

15. Devirli olmayan ve mertebesi p^2 (p asal) olan bir grubun tam $p+3$ tane altgrubu vardır, kanıtlayınız.

16. G bir sonlu grup, $H \leq G$, $K \leq G$, $|H| = 25$ ve $|K| = 36$ dir. $H \cap K = \{e\}$ ve $900 \mid |G|$ olduğunu kanıtlayınız.

17. Mertebesi 33 olan bir grubun elemanlarının mertebeleri hangi sayılar olabilir? Böyle bir grubun, mertebesi 3 olan en az bir elemanı bulunduğunu kanıtlayınız.

18. G herhangi bir grup, $|G| = 10$ olsun.

a. G nin, mertebesi 2 olan en az bir elemanı bulunduğunu kanıtlayınız.

b. G değişmeli değilse, G nin, mertebesi 2 olan tam 5 elemanı bulunduğunu kanıtlayınız.

19. p bir asal sayı olmak üzere, değişmeli olmayan ve mertebesi $2p$ olan bir grubun, mertebesi 2 olan tam p elemanı bulunduğunu kanıtlayınız.

20. G herhangi bir grup, $|G| = 8$ olsun.

a. G nin, mertebesi 2 olan en az bir elemanı bulunduğunu kanıtlayınız.

b. G değişmeli değilse, G nin, mertebesi 4 olan bir elemanı bulunduğunu kanıtlayınız.

c. Bir örnekle, G nin, mertebesi 4 olan hiç elemanı bulunmayabileceğini gösteriniz.

21. \mathcal{S}_3 için bir altgrup kafesi yapınız.