CEVAPLAR

ALIŞTIRMALAR 5

1. Üreteçler, 1 ve 5. Tablo aşağıdadır.

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

3. $< 3 >= \{0, 3, 6, 9, 12, 1, 4, 7, 10, 13, 2, 5, 8, 11\} =< 11 >= \mathbb{Z}_{14}$.
$< 2 >= \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\} \neq \mathbb{Z}_{14}$.

5. $< 3 >= \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 2, 5, 8, 11, 14, 17\} = < 7 >= \mathbb{Z}_{20}$.

7. $\mathbb{Z}_{20}$ içinde $\{2, 18\}$ ve $\{6, 14\}$ kümelerinin her birindeki elemanlar birbirinin tersidir. $\mathbb{Z}_{14}^*$ içinde $\{3, 5\}$, $\{9, 11\}$ kümelerinin her birindeki elemanlar da birbirinin tersidir.

9. Bundan önceki soruda verilen $\mathbb{Z}_r^*$, $\mathbb{Z}_s^*$ ve $\mathbb{Z}_{rs}^*$ için $|\mathbb{Z}_{rs}^*| = |\mathbb{Z}_r^*||\mathbb{Z}_s^*|$.

11. $n \in \mathbb{N}$; $H \leq \mathbb{Z}_{2n}$, $A = \{a \in H : a \text{ tek}\}$, $B = \{b \in H : b \text{ çift}\}$ olsun. Bu takdirde, $H = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ tir. Eğer $B \neq \emptyset$ ise, $f : A \longrightarrow B$, $f(a) = a - 1$ tanımlayalım. f, iyi tanımlı, bire-bir ve örtendir. Dolayısıyla, $|A| = |B| = \frac{|H|}{2}$.

13. a. $(1\ 3)^{-1} = (1\ 3)$ **b.** $(1\ 3\ 5)^{-1} = [(1\ 5)(1\ 3)]^{-1} = (1\ 3)(1\ 5) = (1\ 5\ 3)$

c. $(1\ 3\ 5\ 6\ 7)^{-1} = [(1\ 7)(1\ 6)(1\ 5)(1\ 3)]^{-1} = (1\ 3)(1\ 5)(1\ 6)(1\ 7) = (1\ 7\ 6\ 5\ 3)$.

15. $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_t$ ayrık çevrimler olmak üzere $\alpha = \delta_1\delta_2...\delta_t$, her $i = 1, 2, ..., t$ için $|\delta_i| = r_i$, $okek(r_1, r_2, ..., r_t) = r$, $|\alpha| = m$ olsun. Ayrık çevrimlerde değişme özelliği bulunduğundan ve her $i = 1, 2, ..., t$ için $\delta_i^r = \imath$ olduğundan, $\alpha^r = \delta_1^r\delta_2^r\ ...\ \delta_t^r = \imath$; dolayısıyla, $m \mid r$. Diğer yandan, $\delta_i = (k_{i1}, k_{i2},\ ...\ , k_{in_i})$, $1 \leq i \leq t$ ise, $\delta_i^m(k_{ij}) = \alpha^m(k_{ij}) = k_{ij}$; $k \neq k_{ij}$, $1 \leq j \leq n_i$, $1 \leq i \leq t$ ise, $\delta_i^m(k) = \delta(k) = k$ ve dolayısıyla, $\delta_i^m = \imath$ dır. O halde, her $i = 1, 2, ..., t$ için $r_i \mid m$ ve böylece, $r \mid m$. Sonuç olarak, $m = r$. Alıştırma 14'te verilen permütasyonların mertebeleri: $|(1\ 3\ 5)(2\ 4)| = 6$, $|(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)| = 9$, $|(1\ 3\ 5\ 6)(2\ 4)| = 8$.

17. $\alpha = (1\ 3)$, $\beta = (1\ 2)$ için $\alpha\beta = (1\ 2\ 3)$; $|\alpha| = |\beta| = 2$ ve $|\alpha\beta| = 3$.

19. $(1\ 2)(1\ 3) = (1\ 2\ 3)$, $(1\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2)$.

21. $H \leq \mathcal{S}_n$, $A = \{\alpha \in H : \alpha \text{ çift}\}$, $B = \{\beta \in H : \beta \text{ tek}\}$ olsun. Eğer $B \neq \emptyset$ ise, $\beta \in B$ alalım ve $f : A \longrightarrow B$, $f(\alpha) = \alpha\beta$ tanımlayalım. f, iyi tanımlı, bire-bir ve örten bir fonksiyon olduğundan, $|A| = |B| = \frac{|H|}{2}$ olduğu görülür. $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{S}_n$ içindeki tüm çift permütasyonlardan oluştuğundan, $|\mathcal{A}_n| = \frac{n!}{2}$ dir.

23. a. Her a, $b \in \{2, 3, \cdots, n\}$ için $(1\ a)(1\ b)(1\ a) = (a\ b)$ olup devrinimler $\mathcal{S}_n$ yi üretir.

b. $(1\ 2)(1\ 2\ \cdots\ n) = (2\ 3\ \cdots\ n)$ ve her $a \geq 2$ için $(2\ 3\ \cdots\ n) \cdot (1\ a) \cdot (2\ 3\ \cdots\ n)^{-1} = (1\ a+1)$ olduğundan, $\{(1\ 2), (1\ 2\ 3\ \cdots\ n)\}$ $\mathcal{S}_n$ yi üretir.