

ALİŞTIRMALAR 5

- $\langle \mathbb{Z}_6, + \rangle$ grubunun işlem tablosunu yapınız ve bu devirli grubun üreteçlerini belirleyiniz.
- $\langle \mathbb{Z}_6, + \rangle$ içinde aşağıdaki denklemleri çözünüz:
 - $x - 2 = 4$
 - $x + 2 = 1$
 - $x + y = 4$
 - $x + y = 1$
- $\mathbb{Z}_{14} = \langle 3 \rangle = \langle 11 \rangle$ olduğunu gösteriniz. $\mathbb{Z}_{14} = \langle 2 \rangle$ midir?
- $\mathbb{Z}_{14}^* = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle$ olduğunu gösteriniz. $\mathbb{Z}_{14}^* = \langle 11 \rangle$ midir?
- $\mathbb{Z}_{20} = \langle 3 \rangle = \langle 7 \rangle$ olduğunu gösteriniz.
- Her $k \in \mathbb{Z}_{20}^*$ için $\mathbb{Z}_{20}^* \neq \langle k \rangle$ olduğunu gösteriniz.
- \mathbb{Z}_{20} içinde $\{2, 18\}$ ve $\{6, 14\}$ kümelerinin her birindeki her iki elemanın da mertebelerinin aynı olduğunu, mertebeleri hesaplamaksızın kanıtlayınız. \mathbb{Z}_{14}^* içinde $\{3, 5\}$, $\{9, 11\}$ kümeleri için de aynı önermeyi kanıtlayınız.
- Aşağıdaki grupların mertebelerini bulunuz.
 - \mathbb{Z}_3^* , \mathbb{Z}_4^* , \mathbb{Z}_{12}^*
 - \mathbb{Z}_3^* , \mathbb{Z}_5^* , \mathbb{Z}_{15}^*
 - \mathbb{Z}_4^* , \mathbb{Z}_5^* , \mathbb{Z}_{20}^*
 - \mathbb{Z}_5^* , \mathbb{Z}_7^* , \mathbb{Z}_{35}^*
- Bundan önceki soruya verdiğiniz yanıtlardan yola çıkarak, \mathbb{Z}_r^* , \mathbb{Z}_s^* ve \mathbb{Z}_{rs}^* in mertebeleri hakkında bir öneri geliştiriniz.
- \mathbb{Z}_2^* , \mathbb{Z}_4^* , \mathbb{Z}_8^* in mertebelerini hesaplayınız. Bulduğunuz sonuç, 9 uncu soruya verdiğiniz yanıtla çelişiyor mu? Çelişiyorsa, önerinizi gözden geçirip düzeltmeye çalışınız.
- $n \in \mathbb{N}$; $H \leq \mathbb{Z}_{2n}$ ise, ya H nin tüm elemanları çift ya da H nin

elemanlarının tam yarısı çifttir; kanıtlayınız.

12. \mathcal{S}_6 içinde

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

elemanları veriliyor.

a. $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, β^2 , $\alpha\beta^2$, $\beta\alpha^2$, α^{-1} , $\beta\alpha^{-1}$ i bulunuz.

b. α ve β yı ayrık çevrimlerin çarpımı olarak yazınız.

c. α ve β yı devrinimlerin çarpımı olarak yazıp her birinin tek veya çift permütasyon olduğunu belirleyiniz.

13. Aşağıdaki çevrimlerin terslerini bulunuz.

a. $(1\ 3)$ **b.** $(1\ 3\ 5)$ **c.** $(1\ 3\ 5\ 6\ 7)$

14. Aşağıdaki permütasyonların terslerini bulunuz.

a. $(1\ 3\ 5)(2\ 4)$ **b.** $(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$ **c.** $(1\ 3\ 5\ 6)(2\ 4)$

15. Eğer $\alpha \in \mathcal{S}_n$, ayrık çevrimlerin çarpımı olarak yazılmışsa, α nın mertebesi, çarpanlarının mertebelerinin en küçük ortak katıdır, gösteriniz. Alıştırma 14'te verilen permütasyonların mertebelerini bulunuz.

16. \mathcal{A}_8 in, mertebesi 15 olan bir elemanı bulunduğunu kanıtlayınız.

17. Öyle $\alpha, \beta \in \mathcal{S}_3$ bulunuz ki $|\alpha| = |\beta| = 2$ ve $|\alpha\beta| = 3$ olsun.

18. Öyle bir G grubu ve $x, y \in G$ bulunuz ki $|x| = |y| = 3$ ve $|xy| = 5$ olsun.

19. $n \geq 3$ için \mathcal{S}_n değişmeli olmayan bir gruptur, kanıtlayınız.

20. $\alpha, \beta \in \mathcal{S}_n$ olsun. Aşağıdakileri kanıtlayınız.

- a.** α çift ve β çift ise, $\alpha\beta$ da çifttir. **b.** α çift ise, α^{-1} de çifttir.
c. α tek ve β tek ise, $\alpha\beta$ çifttir. **d.** α tek ise, α^{-1} de tektir.
e. α tek ve β çift ise, $\alpha\beta$ tektir. **f.** α tek ise, $\beta^{-1}\alpha\beta$ tektir.

21. $H \leq \mathcal{S}_n$ ise, ya H nin tüm elemanları çifttir ya da yarısı çift, yarısı tektir, kanıtlayınız. Buradan, $|\mathcal{A}_n| = (n!)/2$ olduğunu gösteriniz.

22. $\delta = (x_1 x_2 \cdots x_r) \in \mathcal{S}_n$ bir çevrim ve $\sigma \in \mathcal{S}_n$ herhangi bir eleman ise, $\sigma\delta\sigma^{-1} = (\sigma(x_1) \sigma(x_2) \cdots \sigma(x_r))$ olduğunu gösteriniz.

23. Aşağıdaki kümelerden her birinin \mathcal{S}_n yi ürettiğini kanıtlayınız:

- a.** $\{(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)\}$ **b.** $\{(1\ 2), (1\ 2\ 3 \cdots n)\}$

(*İpucu:* $(1\ a)(1\ b)(1\ a) = (a\ b)$, $(1\ 2)(1\ 2\ 3 \cdots n) = (2\ 3 \cdots n)$ ve $(2\ 3 \cdots n)(1\ a)(2\ 3 \cdots n)^{-1} = (1\ a+1)$ olduğunu gözlemleyiniz (Bak. Alıştırma 22)).

24. $M(\mathcal{S}_3)$, $M(\mathcal{D}_4)$ ve $M_{\mathcal{D}_4}(t_1)$ i belirleyiniz.