$\mathcal{CEVAPLAR}$

ALIŞTIRMALAR 4

1. **Önerme 1.** *G bir toplamsal grup, $H \subseteq G$ ise, $H \leq G$ olması için gerek ve yeter koşul, (i) $0 \in H$ ve (ii) $x, y \in H \Longrightarrow x - y \in H$ olmasıdır.*

Önerme 2. *G bir toplamsal grup, $H \subseteq G$ ise, $H \leq G$ olması için gerek ve yeter koşul, (i) $H \neq \emptyset$, (ii) $x, y \in H \Longrightarrow x + y \in H$ ve (iii) $x \in H \Longrightarrow -x \in H$ olmasıdır.*

Önerme 3. *G bir toplamsal grup, $H \subseteq G$ ve H sonlu ise, $H \leq G$ olması için gerek ve yeter koşul, (i) $H \neq \emptyset$ ve (ii) $x, y \in H \Rightarrow x+y \in H$ olmasıdır.*

3. **a.** $\mathbb{Q}, \leq \mathbb{R}$ **b.** $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$,
c. $\{\pi x : x \in \mathbb{Q}\} \leq \mathbb{R}$, **d.** $\{\pi^n : n \in \mathbb{Z}\} \not\leq \mathbb{R}$,
e. $\mathbb{Q}^+ \not\leq \mathbb{R}$, **f.** $\mathbb{N} \not\leq \mathbb{R}$,
g. $\{\pi n : n \in \mathbb{Z}\} \leq \mathbb{R}$, **h.** $\{m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z}\} \leq \mathbb{R}$.

5. **a.** (i) $e \in H_1 \cap H_2$; (ii) $x, y \in H_1 \cap H_2 \Longrightarrow xy^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

b. $G = \mathbb{Z}_6$, $1 = \{0, 2, 4\}$, $H_2 = \{0, 3\}$ için $H_1 \cup H_2 \not\leq G$.

c.$\Longrightarrow$: $H_1 \cup H_2 \leq G$ olduğu halde $H_1 \nsubseteq H_2$ ve $H_2 \nsubseteq H_1$ varsayalım. $x \in H_1 \backslash H_2$, $y \in H_1 \backslash H_1$ olsun. Bu takdirde, $x, y \in H_1 \cup H_2$ olacağından, $xy \in H_1 \cup H_2$ ve dolayısıyla $xy \in H_1$ veya $xy \in H_2$ olur. Ancak, $xy \in H_1$ olunca $x^{-1}xy = y \in H_1$; $xy \in H_2$ olunca da $xyy{-}1 = x \in H_2$ çelişkisi ortaya çıkar.

7. **a.** $G = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{x^{-m} : m \in \mathbb{Z}\} = < x^{-1} >$.

b. $|x^k| = t$, $obeb(m, k) = d$, $m = dr$, $k = ds$ olsun. Bu takdir de, $x^{kr} = x^{dsr} = (x^m)^s = e$ olacağından $t \mid r$. Diğer yandan, $x^{kt} = e$

olduğundan, $m \mid kt$ ve buradan $dr \mid dst,\ r \mid st$ olduğu; r ve s aralarında asal olduğundan da $r \mid t$; sonuç olarak, $t = r = \frac{m}{obeb(m,k)}$ olduğu görülür.

9. $x \neq e$ ve $x^{12} = x^2 \Longrightarrow x^{10} = e \Longrightarrow |x| \in \{2, 5, 10\}$.

11. $|x| = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$ ise, $x^{2k+2} = (x^{k+1})^2 = x$.

13. $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ |A| = 4.$

$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ |B| = 3.$

$AB = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right],\ (AB)^2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right],\ \ldots,\ (AB)^k = \left[\begin{smallmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right];\ |AB| = \infty.$

$BA = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right],\ (BA)^2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right],\ \ldots,\ (BA)^k = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{smallmatrix}\right];\ |BA| = \infty.$

15. $|x| = 2 \Leftrightarrow x^2 = e,\ x \neq e \Leftrightarrow x = x^{-1}$. G sonlu ve G nin mertebesi 2 olan elemanı yoksa, $G = \{e,\ \underbrace{a_1, (a_1)^{-1}},\ \underbrace{a_2, (a_2)^{-1}},\ \ldots,\ \underbrace{a_k, (a_k)^{-1}}\}$ nin mertebesi çift olamaz.

17. $a \in M(G) \Longleftrightarrow ax = xa\ \forall\ x \in G \Longleftrightarrow a \in M_G(x)\ \forall\ x \in G \Longleftrightarrow a \in \bigcap\limits_{x \in G} M_G(x)$.

19. $|x| = 5$ ise, $x^6 = x$ dir. Böylece, $a \in M_G(x^3) \Rightarrow ax^3 = x^3a \Rightarrow ax^6 = (x^3a)x^3 \Rightarrow ax = x^3(ax^3) = x^3(x^3a) = x^6a = xa \Rightarrow a \in M_G(x)$ ve sonuç olarak, $M_G(x^3) \subseteq M_G(x)$. Diğer yandan, $a \in M_G(x) \Rightarrow ax = xa \Rightarrow ax^3 = axx^2 = xax^2 == xaxx = x^2ax = x^3a \Rightarrow a \in M_G(x^3)$ ve $M_G(x) \subseteq M_G(x^3)$.

21. a. Yansıma ve simetri özelliklerinin sağlandığı aşikar. Geçişme özelliğini görmek için, $(h_1,k_1)\beta(h_2,k_2),\ (h_2,k_2)\beta(h_3,k_3)$ olsun. Bu takdirde, $h_1k_1 = h_2k_2,\ h_2k_2 = h_3k_3$ vedolayısıyla, $h_1k_1 = h_3k_3$ ve buradan da $(h_1,k_1)\beta(h_3,k_3)$ olduğu görülür.

b. $[(h,k)]_\beta = \{((x,y) \in H \times K : hk = xy\}$. $f\ :\ [(h,k)]_\beta \longrightarrow H \cap K,\ f(x,y) = h^{-1}x = ky^{-1}$, iyi tanımlı, bire-bir ve örten bir fonksiyon verir. Dolayısıyla, her $(h,k) \in H \times K$ için $|[(h,k)]_\beta| = |H \cap K|$ dır.

c. $g\ :\ HK \longrightarrow H \times K\ /\beta,\ g(hk) = [(h,k)]_\beta$, iyi tanımlı, bire-bir ve örten bir fonksiyondur. Dolayısıyla, $|H \times K\ /\beta| = |HK|$ dır.

d. Denklik sınıfları $H \times K$ nın bir parçalanışını verdiğinden ve önceki iki şıktan, $|H||K| = |H \times K| = |H \times K\ /\beta||H \cap K| = |HK||H \cap K|$ ve buradan, $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.