ALIŞTIRMALAR 4

1. Önerme 1 , Önerme 2 ve Önerme 3 ü toplamsal gösterimde ifade ediniz.

2. Verilen H ve G için $H \leq G$ olup olmadığını kanıtlayınız.

a. $G = GL(2, \mathbb{R})$, $H = \{A \in G : \text{uygun bir } k \in \mathbb{Z} \text{ için } detA = 2^k\}$

b. $G = GL(2, \mathbb{R})$, $H = \{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\}$

c. $G = GL(2, \mathbb{R})$, $H = \{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{Q}^*\}$

d. $G = \mathbb{C}$, $H = \{x + iy \in \mathbb{C} : xy \geq 0\}$

e. $G = \mathbb{C}^*$, $H = \{x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 = 1\}$

f. $G = \mathbb{Z}^{2\times 2}$, $H = \{\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in G : x + y + z + t = 0\}$

g. $G = \mathbb{Z}^{2\times 2}$, $H = \{\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in G : x + y + z + t = 1\}$

h. $G = \mathbb{Z}^{2\times 2}$, $H = \{\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in G : x + t = 0\}$.

3. Aşağıdakilerden her birinin $\mathbb{R}$ nin bir altgrubu olup olmadığını belirleyiniz:

a. $\mathbb{Q}$ **b.** $\mathbb{Z}$ **c.** $\{\pi x : x \in \mathbb{Q}\}$ **d.** $\{\pi^n : n \in \mathbb{Z}\}$

e. $\mathbb{Q}^+$ **f.** $\mathbb{N}$ **g.** $\{\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$ **h.** $\{m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z}\}$

4. Aşağıdakilerden her birinin $\mathbb{R}^*$ ın bir altgrubu olup olmadığını belirleyiniz:

a. $\mathbb{Q}$ **b.** $\mathbb{Z}$ **c.** $\{\pi x : x \in \mathbb{Q}\}$ **d.** $\{\pi^n : n \in \mathbb{Z}\}$

e. $\mathbb{Q}^+$ **f.** $\mathbb{N}$ **g.** $\{\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$ **h.** $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$

5. G bir grup, $H_1 \leq G$ ve $H_2 \leq G$ olsun.

a. $H_1 \cap H_2 \leq G$ olduğunu kanıtlayınız.

b. $H_1 \cup H_2 \leq G$ nin doğru olmayabileceğini bir örnekle kanıtlayınız.

c. $H_1 \cup H_2 \leq G \Longleftrightarrow H_1 \subseteq H_2$ veya $H_2 \subseteq H_1$ olduğunu kanıtlayınız.

6. $H \leq \mathbb{R}$ ise, $K = \{2^a : \ a \in H\} \leq \mathbb{R}^*$ olduğunu kanıtlayınız.

7. G bir devirli grup, $G =< x >$ olsun.

a. $G =< x^{-1} >$ olduğunu gösteriniz.

b. $|x| = m$ ve $k \in \mathbb{Z}$ ise, $|x^k| = \frac{m}{obeb(m,k)}$ olduğunu gösteriniz.

8. Sadece bir tek üreteci bulunan bir devirli grubun mertebesi ya 1 ya da 2 dir, kanıtlayınız.

Aşağıdaki alıştırmaların tümünde, G, bir grubu gösterecektir.

9. $x \in G \backslash \{e\}$ ve $x^{12} = x^2$ ise, x in mertebesi kaç olabilir?

10. $x \in G$ ve $|x| = 20$ ise, $|x^4|$, $|x^{10}|$ ve $|x^{12}|$ yi bulunuz.

11. $x \in G$, x in mertebesi bir tek sayı ise, G nin $y^2 = x$ olacak biçimde bir y elemanı bulunduğunu kanıtlayınız.

12. $x \in G$, $x^2 \neq e$, $x^4 = e$ ise, $x^5 \neq e$ ve $x^6 \neq e$ olduğunu gösteriniz. x in mertebesi kaçtır?

13. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ için A, B, AB ve BA nın mertebelerini bulunuz. Cevap sizi şaşırttı mı?

14. $x, y \in G$, $|x| = 4$, $|y| = 2$ ve $x^3y = yx$ olduğuna

göre $|xy|$ yi bulunuz.

15. Her $x \in G \setminus \{e\}$ için $|x| = 2 \iff x = x^{-1}$ olduğunu gösteriniz. Buradan, eğer G sonlu ve $|G|$ çift sayı ise, G nin en az bir elemanının mertebesinin 2 olduğunu gösteriniz.

16. Her $x \in G$ için $x = x^{-1}$ ise, G nin Abel grubu olduğunu gösteriniz.

17. $M(G) = \bigcap_{x \in G} M_G(x)$ olduğunu gösteriniz.

18. Her $x \in G$ için $M_G(x) = M_G(x^{-1})$ olduğunu gösteriniz.

19. $x \in G$ ve $|x| = 5$ ise, $M_G(x) = M_G(x^3)$ olduğunu gösteriniz.

20. G nin çarpım tablosu yandaki gibi olsun:

a. G nin her bir elemanının merkezleyicisini bulunuz.

b. $M(G)$ yi bulunuz.

c. G nin her bir elemanının mertebesini bulunuz. G nin elemanlarının mertebeleri ile $|G|$ arasında bir ilişki var mı?

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	1	4	3	6	5	8	7
3	3	8	5	2	7	4	1	6
4	4	7	6	1	8	3	2	5
5	5	6	7	8	1	2	3	4
6	6	5	8	7	2	1	4	3
7	7	4	1	6	3	8	5	2
8	8	3	2	5	4	7	6	1

21. G bir grup, H ve K, G nin sonlu altgrupları olmak üzere HK şöyle tanımlansın:

$$HK = \{hk : h \in H, k \in K\}.$$

a. $H \times K$ içinde

$$(h_1, k_1)\beta(h_2, k_2) \Longleftrightarrow h_1k_1 = h_2k_2$$

ile tanımlanan β bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

b. $H \times K$ içinde β ya göre denklik sınıflarından her birinin kardinalitesinin $|H \cap K|$ olduğunu gösteriniz.

c. $H \times K$ içinde β ya göre denklik sınıflarının sayısının $|HK|$ olduğunu gösteriniz.

d. $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$ olduğunu gösteriniz.