ALIŞTIRMALAR 3

1. Aşağıda, her şıkta, bir küme ve bu küme üzerinde bir ikili işlem verilmiştir. Böylece oluşan cebirsel yapılardan her birinin bir grup olup olmadığını; grup olanların her birinin değişmeli grup olup olmadığını belirleyiniz. Her bir grupta birim elemanı ve her elemanın tersini açıkça gösteriniz.

a. $\mathbb{N},\ a*b=a+b$ **b.** $\mathbb{Z},\ a*b=a-b$ **c.** $\mathbb{Q},\ a*b=ab$

ç. $\mathbb{Q}^+,\ a*b=ab$ **d.** $\mathbb{R}^+,\ a*b=\frac{a}{b}$ **e.** $\mathbb{R}^+,\ a*b=\frac{ab}{3}$

f. $\{z\in\mathbb{C}: z^5=1\},\ z_1*z_2=z_1z_2$

g. $\mathbb{R}^2,\ (a_1,a_2)*(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$

h. $\mathbb{R}^2,\ (a_1,a_2)*(b_1,b_2)=(a_1b_1,a_2b_2)$

2. Her $a,b\in\mathbb{Z}$ için $a*b=a+b+2$ olsun.

a. $<\mathbb{Z},*>$ ın bir değişmeli grup olduğunu gösteriniz.

b. $3*x*5=13$ denklemini çözünüz.

3. $G=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ ve $a,b\in G$ için $a*b=a+b+ab$ olsun.

a. $<G,*>$, bir Abel grubudur, kanıtlayınız.

b. $2*x*3=5$ denklemini G'de çözünüz.

4. Aşağıdaki ifadelerden her birini önce toplamsal gösterimde, sonra da $*$ gösteriminde yazınız.

a. x^2y^3 **b.** $x^{-2}(y^{-1}z)^2$ **c.** $(xy^2)^{-3}z^2=e$

5. G bir grup; $x, a \in G$ ve $n \in \mathbb{Z}$ ise, $(a^{-1}xa)^n = a^{-1}x^n a$ olduğunu kanıtlayınız.

6. Yandaki tablo, bir grubun işlem tablosu olduğuna göre, boşlukları doldurunuz.

	e	a	b	c	d
e	e				
a		b	c	d	
b			d		
c			e	a	
d		e		b	

7. $< G, * >$ bir grup, her $a \in G$ için $a * a = e$ ise, $< G, * >$ ın bir Abel grubu olduğunu gösteriniz.

8. $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesi üzerinde aşağıdaki üç koşulu sağlayan bir ve yalnız bir ikili işlem bulunduğunu gösteriniz ve bu işlemin tablosunu veriniz.

a. Her $x, y \in G$ için $x * y \leq x + y$ dir.

b. Her $x \in G$ için $x * x = 0$ dır.

c. $< G, * >$ bir gruptur.

9. Öyle bir grup G ve grup elemanları $a, b \in G$ bulunuz ki $a^{-1}ba \neq b$ olsun.

10. G bir grup olsun. Eğer G nin herhangi üç elemanı a, b, c için $b \neq c$ olunca daima $ab \neq ca$ oluyorsa, G nin bir Abel grubu olduğunu kanıtlayınız.

11. G bir Abel grubu ise, her $x, y \in G$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için $(xy)^n = x^n y^n$ olduğunu kanıtlayınız. Bu sonuç, Abel olmayan gruplar için doğru mudur?

12. Bir G grubu için aşağıdaki koşulların denk olduğunu gösteriniz.

a. G bir Abel grubudur.

b. Her $x, y \in G$ için $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ dir.

c. Her $x, y \in G$ için $(xy)^2 = x^2y^2$ dir.

13. Önerme 1 ve sonuçlarını toplamsal gösterimde ifade ediniz.

14. Önerme 1 (ii) ve (iv) ü kanıtlayınız.

15. Önerme 2 yi toplamsal gösterimde ifade ediniz.

16. $G = \{3^m 6^n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin, rasyonel sayıların çarpma işlemi ile, bir Abel grubu olduğunu gösteriniz.

17. $G = \{e, a, b, c\}$ kümesinin, yandaki tabloda tanımlanan $*$ işlemi ile, bir Abel grubu oluşturduğunu gösteriniz (Bu gruba *F. Klein'in dörtlü grubu* ya da kısaca *dörtlü grup* denir).

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e