BÖLÜM 2

İKİLİ İŞLEMLER

Bu bölümü bitirdiğinizde,

- ikili işlem, işlem tablosu
- n modunda toplama ve çarpma işlemleri
- birleşme özelliği
- değişme özelliği
- birim eleman
- bir elemanın tersi, tersinirlik
- denklik sınıflarına taşınabilirlik, indirgenmiş ikili işlem

konularında bilgi sahibi olabileceksiniz.

BÖLÜM 2

İKİLİ İŞLEMLER

Bir K kümesi verilmiş olsun. K üzerinde (veya K içinde) bir ikili işlem denince K nın herhangi iki elemanına yine K nın bir elemanını karşılık getiren bir kural anlaşılır.

Tanım 1. K bir küme olsun. $K \times K$ dan K ya tanımlı bir

$$* : K \times K \longrightarrow K \quad , \quad (x, y) \longrightarrow x * y$$

fonksiyonuna K içinde bir *ikili işlem* denir. $\square$

Böylece, K içinde bir ikili işlem, $K \times K$ nın her sıralı ikilisi (x, y) ye K nın bir ve yalnız bir $x * y$ elemanını karşılık getirir. Yukarıda olduğu gibi, (x, y) sıralı ikilisinin $*$ ikili işlemi altındaki görüntüsünü, $*(x, y)$ ile değil de $x * y$ ile göstermek daha elverişlidir.

En çok bilinen ikili işlem örnekleri, tamsayıların (ve reel sayıların) toplama, çıkarma ve çarpma işlemleridir. Bölme işlemi, tamsayılar içinde bir ikili işlem değildir (Neden?).

Reel girdili 2×2 matrislerden oluşan $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ (daha genel olarak, $n \times n$ matrislerden oluşan $\mathbb{R}^{n \times n}$) kümesi içinde matris toplamı ve matris çarpımı, ilginç ikili işlem örnekleridir.

İkili işlemlerle ilgili genel bilgileri sunarken, ikili işlemleri $*$, $+$, $\cdot$, $\bullet$ ve $\circ$ gibi simgelerle göstereceğiz. Ayrıca, bazen, *ikili işlem* anlamına gelmek üzere sadece *işlem* sözcüğünü kullanacağız.

Eğer K kümesi sonlu bir küme ise, K içinde bir ikili işlem için bir *işlem tablosu* tanımlanabilir ve bu tablo, söz konusu ikili işlemi tamamen belirler. Bu tabloda, K nın her elemanı için bir satır ve bir sütun vardır; $x \in K$ ya karşılık gelen satır ile $y \in K$ ya karşılık gelen sütunun ortak elemanı, $x * y$ dir.

Örnek 1. $K = \{a, b, c\}$ kümesi içinde

$$\begin{array}{lll} a * a = a, & a * b = c, & a * c = a, \\ b * a = a, & b * b = b, & b * c = b, \\ c * a = c, & c * b = a, & c * c = c \end{array}$$

$*$	a	b	c
a	a	c	a
b	a	b	b
c	c	a	c

ile tanımlanan $*$ işleminin tablosu yanda verilmiştir. □

Bir ikili işleme ait tabloda $x * y$ yi bulmak için, önce ilk elemanı x olan satır bulunur ve bu satır boyunca ilk elemanı y olan sütuna kadar ilerlenir; böylece ulaşılan eleman, $x * y$ dir.

Aynı K kümesi üzerinde farklı ikili işlemler tanımlanabileceği açıktır. Bir sonraki örnekte, yukarıda ele alınan $K = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde yeni bir ikili işlem verilmiştir.

Örnek 2. $K = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde yandaki tablo ile verilen ikili işlem, Örnek 1 deki $*$ işleminden farklıdır. Zira, $c \circ a = a$, fakat $c * a = c$ dir.

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

□

Örnek 3. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ olmak üzere, $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ kümesini ele alalım. Bu küme içinde, tamsayılarda bölme algoritmasını kullanarak bir toplama, $\oplus$ ve bir çarpma, $\odot$ işlemi tanımlayacağız. $x, y \in \mathbb{Z}_n$ için $x+y$ ve $x \cdot y$ ye $\mathbb{Z}$ içinde bölme(n ile bölme) algoritmasını uygulayalım:

$$x + y = an + r \ , \ a \in \mathbb{Z}, \ r \in \mathbb{Z}_n \ \ ; \ \ x \cdot y = bn + s, \ b \in \mathbb{Z}, \ s \in \mathbb{Z}_n.$$

Bu durumda, r ve s, sırasıyla, $x + y$ ve $x \cdot y$ sayıları n ile bölündüğünde elde edilen en küçük negatif olmayan kalanlar olup tek türlü belirli olduklarından,

$$x \oplus y = r \quad \text{ve} \quad x \odot y = s$$

tanımlanırsa, $\mathbb{Z}_n$ içinde $\oplus$ ve $\odot$ ikili işlemleri elde edilir. Bu işlemlere, sırasıyla, *n modunda toplama işlemi* ve *n modunda çarpma işlemi* denir. $\square$

İkili işlemler arasında bazı özelliklere sahip olan ve bu nedenle daha çok önem kazanan ikili işlemler vardır. Şimdi, bunlara örnekler vereceğiz.

Tanım 2. K bir küme ve $*$, K üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer her $x, y, z \in K$ için $(x * y) * z = x * (y * z)$ ise, $*$ işleminin *birleşme özelliği* vardır (veya K nın $*$ işlemine göre birleşme özelliği vardır) denir. $\square$

Reel sayıların toplama ve çarpma işlemlerinin birleşme özelliğine sahip olduğu bilinmektedir. Çıkarma işleminin birleşme özelliği var mıdır? Matris toplamı ve matris çarpımı, reel girdili matrisler üzerinde, birleşme özelliğine sahiptir.

Bir küme üzerinde bir ikili işlemin birleşme özelliğine sahip olup olmadığını anlamak, göründüğü kadar kolay bir iş değildir. Örneğin, n elemanlı bir küme üzerinde bir ikili işlemin birleşme özelliğini kontrol etmek için Tanım 2'de verilene benzer n^3 eşitliği gerçeklemek gerekir. Neyse ki bilinen ikili işlemlerin çoğunun birleşme özelliğine sahip olduklarını başka vesilelerle biliyoruz!

Örnek 4. $\mathbb{Z}_n$ içinde tanımlanan n modunda toplama ve çarpma işlemlerinin birleşme özellikleri vardır. Gerçekten, $\mathbb{Z}$ içinde toplama ve çarpma işlemlerinin birleşme özelliği bulunduğundan, $x, y, z \in \mathbb{Z}_n$ için

$$(x+y)+z = x+(y+z) = x+y+z \quad \text{ve} \quad (xy)z = x(yz) = xyz$$

dir. Buradan görülür ki $(x \oplus y) \oplus z$ ve $x \oplus (y \oplus z)$ her ikisi de $x+y+z$ nin n ile bölünmesiyle elde edilen en küçük negatif olmayan kalandır. Benzer şekilde, $(x \odot y) \odot z$ ve $x \odot (y \odot z)$ her ikisi de xyz nin n ile bölünmesiyle elde edilen en küçük negatif olmayan kalandır. Böylece, n modunda toplama işlemi, $\oplus$ ve çarpma işlemi, $\odot$ nın birleşme özelliğine sahip olduğu görülür. $\square$

$*$, K üzerinde birleşme özelliğine sahip bir ikili işlem ise, $x, y, z \in K$ için $(x*y)*z = x*(y*z)$ ifadelerindeki parantezler kaldırılarak $x*y*z$ den söz edilebilir. Daha genel olarak, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ olmak üzere K nın n tane elemanı, $x_1, \ldots, x_n$ için $x_1 * \cdots * x_n$, tümevarımla tanımlanabilir:

$$x_1 * \cdots * x_{n-1} * x_n = (x_1 * \cdots * x_{n-1}) * x_n.$$

Teorem 1. *K bir küme ve $*$, K üzerinde birleşme özelliğine sahip bir ikili işlem; $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x, x_1, \ldots, x_n \in K$ olsun. Bu takdirde,*

$$(i) \quad x * (x_1 * \cdots * x_n) = x * x_1 * x_2 * \cdots * x_n$$

dir. Ayrıca, $1 \leq n_1 < \cdots < n_{k-1} < n$ olan her $n_1, \ldots, n_{k-1}$ için

$$(ii) \quad (x_1 * \cdots * x_{n_1}) * \cdots * (x_{n_{k-1}+1} * \cdots * x_n) = x_1 * \cdots * x_n$$

dir.

Kanıt. (i) $n = 1$ için kanıtlanacak bir şey yoktur. $n > 1$ olsun ve n den küçük her doğal sayı için iddianın doğruluğunu varsayalım. Bu takdirde, sırasıyla, yukarıdaki tanım, birleşme özelliği, tümevarım hipotezi ve tekrar tanım kullanılarak

$$\begin{aligned} x*(x_1*\cdots*x_n) &= x*((x_1*\cdots*x_{n-1})*x_n) = (x*(x_1*\cdots*x_{n-1}))*x_n \\ &= (x * x_1 * \cdots * x_{n-1}) * x_n = x * x_1 * \cdots * x_{n-1} * x_n \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $k = 1$ için $n_1 = n$ olur ve iddianın doğru olduğu açıktır. $k = 2$ ve $1 \leq n_1 < n$ olsun. Bu takdirde,

$$(x_1 * \cdots * x_{n_1}) * (x_{n_1+1} * \cdots * x_n) = x_1 * x_2 \cdots * x_n$$

olduğu, n_1 üzerinde tümevarımla kanıtlanabilir. Gerçekten, $n_1 = 1$ ise, iddia, (i) ile çakışır. $n_1 > 1$ olsun ve iddianın n_1 den küçük her doğal sayı için doğru olduğunu varsayalım. O zaman tümevarım hipotezi ve (i) kullanılarak

$$(x_1 * \cdots * x_{n_1}) * (x_{n_1+1} * \cdots * x_n)$$

$$= ((x_1 * \cdots * x_{n_1-1}) * x_{n_1}) * (x_{n_1+1} * \cdots * x_n)$$
$$= (x_1 * \cdots * x_{n_1-1}) * ((x_{n_1}) * (x_{n_1+1} * \cdots * x_n))$$
$$= (x_1 * \cdots * x_{n_1-1}) * (x_{n_1} * x_{n_1+1} * \cdots * x_n) = x_1 * x_2 \cdots * x_n$$

elde edilir. Kanıt, k üzerinde tümevarımla tamamlanabilir(tamamlayınız). ■

Gözlem 1. K kümesinin birleşme özelliğine sahip ikili işlemi topla ma işlemi ise, $x_1, \ldots, x_n$ nin toplamı, Σ gösterimi ile

$$x_1 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

biçiminde ifade edilir. Bu durumda, Teorem 1 deki (i) ve (ii), aşağıdaqki biçimi alır:

$$x + (x_1 + \cdots + x_n) = x + x_1 + \cdots + x_n,$$
$$(x_1 + \cdots + x_{n_1}) + \cdots + (x_{n_{k-1}+1} + \cdots + x_n) = x_1 + \cdots + x_n.$$

Eğer $x_1 = \cdots = x_n = x$ ise, $x_1, \ldots, x_n$ nin toplamı, nx veya $n \cdot x$ ile gösterilir:

$$nx = \overbrace{x + \cdots + x}^{n\ tane} = \sum_{i=1}^{n} x.$$

nx ifadesine x in n *katı* denir. Ayrıca, Teorem 1 den yararlanılarak her $m, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in K$ için $mx + nx = (m+n)x$, $m(nx) = (mn)x$ olduğu görülür. K kümesinin birleşme özelliğine sahip ikili işlemi çarpma işlemi ise, $x_1, \ldots, x_n$ nin çarpımı, Π gösterimi ile

$$x_1 x_2 \cdots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

biçiminde ifade edilir. Bu durumda, Teorem 1 deki (i) ve (ii), aşağıdaki biçimi alır:

$$x(x_1 \cdots x_n) = x x_1 \cdots x_n,$$
$$(x_1 \cdots x_{n_1}) \cdots (x_{n_{k-1}+1} \cdots x_n) = x_1 \cdots x_n.$$

Eğer $x_1 = \cdots = x_n = x$ ise, $x_1, \ldots, x_n$ nin çarpımı x^n ile gösterilir:

$$x^n = \overbrace{x \cdots x}^{n\ tane} = \prod_{i=1}^{n} x.$$

x^n ye, x in $n-$*inci kuvveti* denir. Ayrıca, Teorem 1 den yararlanılarak, her $m, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in K$ için $x^m x^n = x^{m+n}$, $(x^m)^n = x^{mn}$ olduğu görülür. $\Box$

Tanım 3. K bir küme ve $*$, K üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer her $x, y \in K$ için $x * y = y * x$ ise, $*$ işleminin *değişme özelliği* vardır denir. $\Box$

Reel sayıların toplama ve çarpma işlemlerinin değişme özelliği vardır; fakat, çıkarma işleminin değişme özelliği yoktur. Reel girdili matrisler için matris toplama işleminin değişme özelliği vardır; fakat, matris çarpımı işleminin değişme özelliği yoktur. Bu durumu, reel girdili 2×2 matrislerde kolayca gözlemleyebiliriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

Örnek 5. $\mathbb{Z}$ içindeki toplama ve çarpma işlemlerinin değişme özelliğinden dolayı, $\mathbb{Z}_n$ içinde tanımlanan n modunda toplama ve çarpma işlemlerinin de değişme özelliği vardır. $\Box$

Örnek 6. A, boş olmayan bir küme ve $\mathcal{F}(A)$, A dan A ya tanımlı tüm fonksiyonlardan oluşan küme olsun. Her $f, g \in \mathcal{F}(A)$ için *f ile g nin bileşkesi*, $f \circ g$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad x \in A$$

ile tanımlanır. Böylece, $\mathcal{F}(A)$ içinde *fonksiyon bileşimi* denilen bir ikili işlem elde edilir. Bu ikili işlemin daima birleşme özelliği vardır; fakat değişme özelliği yoktur. Gerçekten $f, g, h \in \mathcal{F}(A)$ ve $x \in A$ için

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) \\ &= f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x) \end{aligned}$$

tir. Bununla beraber, A kümesinin iki farklı elemanı a ve b, $a \neq b$, bulunduğunu kabul edip f ve g yi öyle seçelim ki her $x \in A$ için $f(x) = a$

ve $g(x) = b$ olsun. O zaman, her $x \in A$ için

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(b) = a \quad , \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a) = b$$

olur ve bu, $f \circ g \neq g \circ f$ olduğunu gösterir. □

Sonlu bir küme üzerinde bir ikili işlemin değişme özelliğine sahip olup olmadığı, o işlemin tablosundan kolayca anlaşılabilir. İkili işlemin işlem tablosunun üst sol köşesi ile alt sağ köşesini birleştiren köşegeni düşününüz. İkili işlemin değişme özelliğinin var olması için gerek ve yeter koşul, tablonun bu köşegene göre simetrik olmasıdır. Örnek 1 ve Örnek 2'de verilen ikili işlemlerin değişme özelliğine sahip olup olmadığını tablolarına bakarak belirleyiniz.

K üzerinde birleşme ve değişme özelliğine sahip bir çarpma işlemi varsa ve $x_1, \ldots, x_n \in K$ ise, $\prod_{i=1}^{n} x_i$ çarpımı, çarpanlarının yazılış sırasına bağlı değildir. Başka bir ifadeyle, $1, 2, \ldots, n$ sayılarının herhangi bir sıralanışı $j_1, j_2, \ldots, j_n$ ise,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_n} = \prod_{i=1}^{n} x_{j_i}$$

dir(Bak. Alıştırma 5).

Tanım 4. K bir küme ve $*$, K üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer her $x \in K$ için $e * x = x = x * e$ olacak biçimde bir $e \in K$ varsa , e ye K nın $*$ işlemine göre *birim* elemanı denir. □

Örnek 2'de verilen ikili işlem için b, birim elemandır. Örnek 3'te verilen $\oplus$ işlemi için 0, $\odot$ işlemi için 1, birim elemandır.

Teorem 2. *K bir küme ve $*$, K üzerinde bir ikili işlem olsun. Bu takdirde, K nın birim elemanı varsa, bir tanedir.*

Kanıt. $e, e' \in K$, K nın birim elemanları olsun. e birim eleman olduğundan, $e * e' = e'$; e' birim eleman olduğundan, $e * e' = e$ ve böylece, $e = e'$ dür. ■

Reel sayılar kümesinde toplama işlemine göre birim eleman, 0; çarpma işlemine göre birim eleman, 1 dir. $\mathbb{R}^{2\times 2}$'de toplama işlemine göre birim eleman, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; çarpma işlemine göre birim eleman, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir. Örnek 6'da verilen ikili işlem için birim eleman, A dan A ya tanımlı *birim fonksiyon* , $1_A : A \longrightarrow A, 1_A(x) = x$ tir.

Tanım 5. K bir küme; $*$, K üzerinde bir ikili işlem ve $x \in K$ olsun. K nın $*$ a göre birim elemanı e varsa ve $x' * x = e = x * x'$ olacak biçimde bir x' elemanı varsa, x' ye x in $*$ işlemine göre *ters*i denir ve bu durumda, x elemanı K içinde $*$ ikili işlemine göre *tersinir* elemandır denir. □

Teorem 3. *K bir küme; $*$, K üzerinde bir ikili işlem ve $x \in K$ olsun. K nın $*$ işlemine göre birleşme özelliği ve birim elemanı, e, var olsun. Bu takdirde, x in K içinde tersi varsa, bir tanedir.*

Kanıt. e, K nın birim elemanı; $x', x'' \in K$, her ikisi de x in tersi olsun. Bu takdirde,

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$$

dür. ■

Örnek 7. $\mathbb{Z}_n$ içinde Örnek 3'te tanımlanan n modunda toplama işlemine göre, her $k \in \mathbb{Z}_n$ elemanının tersi vardır; 0 ın tersi kendisi, sıfırdan farklı $k \in \mathbb{Z}_n$ nin tersi, $n-k$ dır. Bununla beraber, n modunda çarpma işlemine göre tersinir olmayan elemanlar vardır. Örneğin, her $n \in \mathbb{Z}$ için 0 ın n modunda çarpma işlemine göre tersi yoktur; $\mathbb{Z}_4$ içinde 2 elemanının 4 modunda çarpma işlemine göre tersi yoktur.

Reel sayılarda toplama işlemine göre her eleman tersinir; x reel sayısının toplama işlemine göre tersi, $(-x)$ tir. Reel sayıların çarpma işlemine göre, 0, tersinir değildir; ancak, 0 dışında her reel sayı tersinir; sıfırdan farklı bir x reel sayısının çarpma işlemine göre tersi, $1/x$ tir. □

Şimdi, önceki bölümün temel kavramlarından biri olan denklik bağıntıqsı kavramı ile bu bölümün temel kavramı olan ikili işlem kavramı arasındaki bir ilişkiyi ele alacağız.

K bir küme; β, K üzerinde bir denklik bağıntısı ve $*$, K üzerinde bir ikili işlem olsun. Acaba $*$ ikili işleminden yararlanarak, K nın β ya göre denklik sınıflarından oluşan K/β kümesi üzerinde bir ikili işlem oluşturabilir miyiz? Bu soruya yanıt araştırırken akla gelebilecek uygulamalardan biri, belki de ilki; K/β üzerinde, $[x]_\beta$, $[y]_\beta \in K/\beta$ için

$$[x]_\beta \bullet [y]_\beta = [x * y]_\beta \qquad (1)$$

ile bir $\bullet$ ikili işlemi tanımlamağa çalışmak olacaktır. Aşağıda, Örnek 8'de görüleceği gibi, K/β üzerinde böylece tanımlanan $\bullet$, bazı durumlarda bir ikili işlem olur; ancak, bazı durumlarda ikili işlem olmaz.

(1) ile tanımlanan $\bullet$ ın K/β üzerinde bir ikili işlem olması için, $K/\beta \times K/\beta$ dan K/β ya bir fonksiyon olması; yani verilen her $[x]_\beta$ ve $[y]_\beta$ için bir ve yalnız bir $[x]_\beta \bullet [y]_\beta$ bulunması gerektiğini hatırlayınız. Bunun için gerek ve yeter koşul, $[x]_\beta = [a]_\beta$ ve $[y]_\beta = [b]_\beta$ olunca, daima $[x]_\beta \bullet [y]_\beta = [a]_\beta \bullet [b]_\beta$ olmasıdır. Başka bir deyişle, $\bullet$ ın K/β içinde bir ikili işlem olması için gerek ve yeter koşul,

$$x, y, a, b \in \mathrm{K} \ ; \ x\beta a \ , \ y\beta b \implies (x * y)\beta(a * b) \qquad (2)$$

olmasıdır.

Tanım 6. K bir küme; $*$, K üzerinde bir ikili işlem ve β, K üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Eğer yukarıda (1) ile tanımı verilen $\bullet$, K/β üzerinde bir ikili işlem olursa, bu takdirde, K üzerindeki $*$ ikili işlemi, β bağıntısına göre *denklik sınıflarına taşınabilir* veya K üzerindeki $*$ işlemi, K/β üzerinde $\bullet$ işlemini *indirger* denir. Bu durumda, $\bullet$ işlemine, $*$ dan *indirgenmiş ikili işlem* de denir. □

Tanım 6 dan önceki gözlemler, yeni deyimlerle şöyle ifade edilebilir: $*$ işleminin β bağıntısına göre denklik sınıflarına taşınabilmesi (veya $*$ ın K/β üzerinde $\bullet$ yı indirgemesi) için gerek ve yeter koşul, (2)'de verildiği gibi

$$x, y, a, b \in \ K \ \ ; \ x\beta a \ , \ y\beta b \implies (x * y)\beta(a * b)$$

olmasıdır.

Örnek 8. $K = \{0, 1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde

$$\beta = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (0,2), (2,0)\}$$

denklik bağıntısı (gerçekten denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz) ile yandaki tablonun tanımladığı $*$ ikili işlemini alalım. β ya göre denklik sınıfları

$*$	0	1	2	3
0	2	0	1	3
1	1	2	0	3
2	0	1	2	3
3	3	3	3	0

$$[0]_\beta = [1]_\beta = [2]_\beta = \{0, 1, 2\} \ , \ [3]_\beta = \{3\}$$

ten ibarettir. Tablodan görülebileceği gibi

$$x, y, a, b \in \ K \quad ; \ x\beta a \ , \ y\beta b \implies (x * y)\beta(a * b)$$

koşulu sağlanmaktadır. Örneğin,

$$0\beta 1 \ , \ 3\beta 3 \text{ için } 0 * 3 = 3 \ , \ 1 * 3 = 3 \text{ ve } (0 * 3)\beta(1 * 3)$$

tür. Böylece, K üzerindeki $*$ işlemi, β ya göre denklik sınıflarına taşınabilir.

Denklik sınıflarını yeniden isimlendirerek, $[3]_\beta = \ \mathbf{I}$ ve $[0]_\beta = [1]_\beta = [2]_\beta = \mathbf{0}$ tanımlarsak, $\mathbf{0} \bullet \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \bullet \ \mathbf{I} = \mathbf{I}$, $\mathbf{I} \bullet \mathbf{0} = \mathbf{I}$, $\mathbf{I} \bullet \mathbf{I} = \mathbf{0}$ elde edilir. $\bullet$ ın yanda verilen işlem tablosunu, $*$ ın yukarıdaki işlem tablosu ile karşılaştırınız. Yorumunuz nedir? $\square$

$\bullet$	**0**	**I**
0	**0**	**I**
I	**I**	**0**