

ALİŞTIRMALAR 1

1. $K = \{0, 1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde

$$\beta = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (0, 2), (2, 0), (1, 3), (3, 1)\}$$

bağıntısı veriliyor. β nın yansıma, simetri, ters-simetri ve geçişme özelliklerine sahip olup olmadığını belirleyiniz. β , bir denklik bağıntısı mıdır? β , bir kısmi sıralama bağıntısı mıdır?

2. Aşağıda tanımlanan β bağıntılarından her birinin, \mathbb{Z} üzerinde bir denklik bağıntısı olup olmadığını belirleyiniz. Eğer β , denklik bağıntısı ise, \mathbb{Z}/β nın bir tam temsilciler kümesini bulunuz.

a. $m\beta n \iff m + n$ çift sayıdır.

b. $m\beta n \iff mn \geq 0$.

c. $m\beta n \iff$ onluk gösterimde m ve n nin son basamaklarında aynı rakam vardır.

3. $x, y \in \mathbb{R}$ için, $x\beta y \iff x - y \in \mathbb{Z}$, tanımlansın.

a. β nın \mathbb{R} üzerinde bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

b. β ya göre denklik sınıflarını belirleyiniz.

4. A ve B kümeler; $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olmak üzere, $a, b \in A$ için, $a\beta b \iff f(a) = f(b)$, tanımlanıyor. β nın A üzerinde bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz ve β ya göre denklik sınıflarını belirleyiniz.

5. $K = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde $x\beta y \iff 3 \mid (y - x)$ tanımlansın.

a. β bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

b. K/β nın tüm elemanlarını bulunuz.

6. $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ olsun. $x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$x\beta y \iff m \mid (x - y)$$

ile tanımlanan β nın \mathbb{Z} üzerinde bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz ve \mathbb{Z}/β nın elemanlarını, yani β ya göre denklik sınıflarını belirleyiniz. (Böylece tanımlanan β bağıntısına, *m modülüne göre kongruans bağıntısı*; bu bağıntıya göre ortaya çıkan denklik sınıflarına, *m modülüne göre kongruans sınıfları* veya *kalan sınıfları* denir ve $x\beta y$ yerine

$$x \equiv y \pmod{m}$$

yazılır).

7. $K = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $K_1 = \{0, 3\}$, $K_2 = \{1, 4\}$, $K_3 = \{2\}$ verilmiş olsun.

a. $\{K_1, K_2, K_3\}$ ün K nın bir parçalanışı olduğunu gösteriniz.

b. Bu parçalanışın K üzerinde belirlediği denklik bağıntısını bulunuz.

c. Bulduğunuz bağıntıyı Alıştırma 5'te verilen β ile karşılaştırınız.

8. Doğal sayılar kümesi \mathbb{N} nin tüm özaltkümelerinden oluşan küme, K olsun. K , altküme olma \subseteq bağıntısıyla kısmi sıralıdır.

a. K nın maksimal elemanı var mıdır?

b. K içinde her zincirin K içinde üstsınırı var mıdır?

9. $K = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x \leq 1\}$ olsun. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K$ için

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2, \text{ ve } y_1 = y_2$$

ile tanımlanan bağıntının K üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olduğunu ve bu sıralama bağıntısına göre K nın sonsuz çoklukta maksimal elemanı bulunduğunu gösteriniz.

10. $K = \{\frac{1}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ kümesi reel sayılarda bilinen \leq ve \geq bağıntıları ile kısmi sıralıdır.

a. K , \leq ile iyi sıralı mıdır?

b. K , \geq ile iyi sıralı mıdır?

11. Tanıdığımız 12 kişinin adlarını listeleyiniz. Bunlardan aynı adı taşıyanlar varsa, onların adlarını numaralayabilirsiniz: "Can 1, Can 2" gibi.

a. Bu listedeki adları, haftanın aynı gününde doğmuş olanları aynı renk olmak üzere değişik renk boyalarla boyayınız. Böylece, 12 elemandan oluşan kümenin bir parçalanışını elde ettiniz mi? Bu parçalanışa karşılık gelen denklik bağıntısını açıklayınız.

b. Bu kümedeki adların sahiplerinden aynı yaşta olanlar var mı? Kişilerin yaşlarını kullanarak bu küme üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlayabilir misiniz?