OPTIMIZASYON

Birçok iktisadi modelde, en önemli hipotez iktisadi ajanın, veri durumlarda en iyiyi yada optimal sonucu elde etmesidir. Bir firmanın yöneticileri maksimum kar için ellerinden geleni yaparlar. Tüketiciler faydalarını maksimize etmek için uğraşırlar ve hükümetler toplam iktisadi çıktıyı maksimize etmek için programlar uygularlar.

1. Bir Değişkenli Fonksiyonların Maksimizasyonu

Bir firma yöneticisi belirli bir malın satılmasından elde edilen kârı maksimize etmek istemektedir. Elde edilen kârlar (π) satılan malın miktarına (Q) bağlıdır. Matematiksel olarak,

$$\pi = f(Q) \qquad (1) \qquad \text{olur.}$$

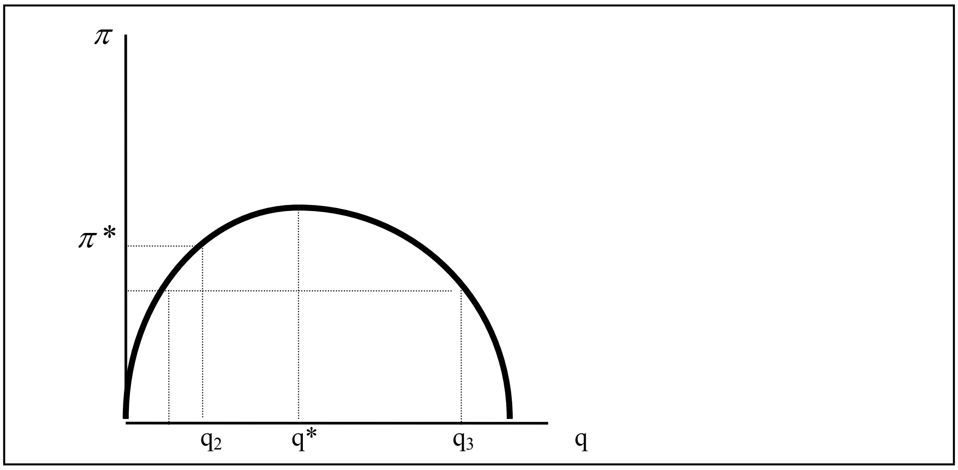
Şekil 1 π ile Q arasındaki olanaklı ilişkileri göstermektedir. Açıkçası, maksimum kârlara ulaşmak için, yönetici, π^* kâra denk gelen, Q^* miktarını üretmelidir. Bu miktardan daha az veya daha çok üretilmesi kârı maksimize etmeyecektir. Peki yönetici maksimum kâr noktasını nasıl bulacaktır? **Şekil 1**`deki gibi bir grafiğe sahip olsaydı, bu maksimum değeri elde etmekte fazla zorlanmazdı.

Böyle bir grafiğe sahip değilse, Q miktarını değiştirerek maksimum kârı elde etmeye çalışacaktır. Örneğin, Q_1`den başlarsak satışlardan gelen karlar π_1 olacaktır. Daha sonra, Q_2 miktarında π_2 karını elde etmektedir. Q miktarında yükselme olduğunda π’de de bir yükselme olduğunu aşağıdaki şekilde,

$$\frac{\pi_2 - \pi_1}{Q_2 - Q_1} > 0 \quad \text{ya da} \quad \frac{\Delta\pi}{\Delta Q} > 0 \qquad (2) \qquad \text{gösterilir.}$$

Δ ifadesi `değişkendeki değişim` olarak kullanılmıştır. $\frac{\Delta\pi}{\Delta Q}$ pozitif olduğundan kar yükselir ve yönetici çıktıyı artırmaya devam edecektir.

Ancak q^* `ın sağına doğru artışlarda, $\frac{\Delta\pi}{\Delta Q}$ negatif olacak ve yönetici bu durumda kârının düşmesinden dolayı $q$`da bir artışa girmeyecektir.



Şekil 1. Üretilen Çıktı ile Kar Arasındaki İlişki

Firma karları maksimize eden çıktı seviyesinde üretim yapmak istiyorsa q^* üretilmelidir.

2. Türev

Matematikçiler, oranlar limiti (limit of ratios) üzerine çalışmışlardır. Örneğin, $\frac{\Delta\pi}{\Delta Q}$ ifadesini q`daki çok küçük değişmeler için incelemişlerdir. Bu limit $\pi = f(Q)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır ve $\frac{d\pi}{dQ}$ ya da $\frac{df}{dq}$ yada $f\,'(q)$ olarak ifade edilir. Daha biçimsel bir bakışla, $\pi = f(Q)$ gibi bir fonksiyonun Q_1 noktasındaki türevi, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\frac{d\pi}{dQ} = \frac{df}{dQ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(Q_1 + h) - f(Q_1)}{h} \qquad (3)$$ dır.

$\lim_{h \to 0}$ sembolünün anlamı sağdaki ifadedeki oranla ilgilendiğimizi belirtir ve h çok küçük bir sayıdır. Bu oranın değeri seçilmiş olan Q_1 noktasına bağlıdır. Burada, Δ ifadesi ile limitin benzerliği görülebilir.

2.1. Bir noktadaki türevin değeri

Bir $q=q_1$ noktasındaki türevin değeri aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\left.\frac{d\pi}{dQ}\right|_{Q=Q_1} \qquad (4) \qquad \text{dür.}$$

Ancak, genellikle $\frac{d\pi}{dQ}$ ifadesini Q `nun her değeri için bakıldığı durumlar söz konusudur. Bu durumda, **Şekil 1**`deki örneğimizdeki gibi, $\left.\frac{d\pi}{dQ}\right|_{Q=Q_1} > 0$ ve $\left.\frac{d\pi}{dQ}\right|_{Q=Q_3} < 0$ yazılır.

Bu durumda, Q^* noktasında $\frac{d\pi}{dQ}$ `nun değeri sıfıra eşittir.

2.2. Maksimum için Birinci–Derece Koşulu

Bir değişkenli bir fonksiyonun bazı noktalarındaki maksimum değerini elde etmek için, bu noktadaki türevi sıfıra eşit olmalıdır. Yani, bir yönetici, $f(q)$ fonksiyonunu elindeki verilerden tahmin edebiliyorsa, teorik olarak, $\frac{df}{dq}=0$ durumundaki noktayı bulması da mümkündür. **Şekil 2`de** türevin bütün değerlerini grafiklendirirsek q^* çıktısı seçilmiş olur. Böylece,

$$\left.\frac{d\pi}{dQ}\right|_{Q=Q^*} \qquad (5) \qquad \text{elde edilir.}$$

2.3. İkinci–Derece Koşulu

Daha önceden alınmış bir türevin türevine *ikinci türev* denir ve $\frac{d^2\pi}{dQ^2}$ ya da $\frac{d^2 f}{dQ^2}$ ya da *f ''(Q)* ile gösterilir. *Q** `ın maksimum olması için,

$$\left.\frac{d^2\pi}{dQ^2}\right|_{Q=Q^*} < 0 \qquad \text{(6) olması gerekmektedir.}$$

2.4. Türev Kuralları

1) *b* sabit ise, $\frac{db}{dx} = 0$ dır. Bu sonuç, bir problemde bir değişkenin değerinin değişmesinin, bu problemdeki parametreleri etkilemediğini ifade eder.
2) *a* ve *b* sabit ve $b \neq 0$ ise, o zaman, $\frac{dax^b}{dx} = bax^{b-1}$ `dir.
3) $\frac{d\log_e x}{dx} = \frac{1}{x}$ ' dir. Log_e, e (=2.71828) tabanlı bir logaritmadır. Doğal logaritma olarak adlandırılır ve *"ln"* olarak yazılır.
4) $\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a$ herhangi bir sabit *a* içindir. Bu kuralın spesifik bir örneği $\frac{de^x}{dx} = e^x$ dir. Yalnızca e^x fonksiyonu türevine eşittir.
5) $\frac{d(f(x)+g(x))}{dx} = f'(x) + g'(x)$
6) $\frac{d(f(x).g(x))}{dx} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
7) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
8) Eğer *y=f(x)* ve *x=g(z)* ve ayrıca *f'(x)* ve *g'(z)* fonksiyonlarının

türevleri mevcutsa, o zaman, $\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz}=\frac{df}{dx}\frac{dg}{dz}$ olur ve bu kurala *Zincir Kuralı* denir.

3. Çok Değişkenli Fonksiyonlar

İktisadi problemlerde, fonksiyonların tek değişkenli olması istisnadır. Ajanların hedefleri genellikle çeşitli değişkenlere ve değerlere bağlıdır. Örneğin, bir bireyin faydası, tüketmiş olduğu her malın miktarına bağlıdır. Bir firmanın üretim fonksiyonu, yani üretmiş olduğu miktar, üretim sürecinde kullanmış olduğu emek, sermaye ve toprak miktarına bağlıdır.

Bu durumlardan dolayı, bir (y) değişkeninin çeşitli değişkenlere bağımlılığı

$y=f(x_1,x_2,........,x_n)$ (7) olarak gösterilir.

3.1. Kısmi Türev

y fonksiyonunun maksimuma ulaştığı nokta nasıl bulunur? x_1 veya diğer değişkenler tarafından alınan türeve *kısmi türev* denir. y fonksiyonunun x_1 tarafından alınan kısmi türevi,

$\frac{\partial y}{\partial x_1}$ veya $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ veya f_{x_1} veya f_1 (8) gösterilir.

Bu hesaplama yapılırken x_1 haricindeki bütün diğer x \`ler sabit kabul edilir. Kısmi türev,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_2,..........,\bar{x}_n}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h,\bar{x}_2,......,\bar{x}_n)-f(x_1,\bar{x}_2,......,\bar{x}_n)}{h} \quad (9)\text{`dür.}$$

Ceteris paribus varsayımı iktisat eğitiminin en başından itibaren öğrencilere öğretilmeye çalışılır. Bu varsayım sayesinde, iktisatçılar modellerinde çeşitli dış etkileri sabit kabul ederek, inceledikleri değişkenin etkilerini görmeye çalışırlar.

Kısmi türev bu yaklaşımın matematiksel yolla en iyi şekilde temsil eder. Bu sayede, bir değişkeni nasıl etkilediğini görmek olanaklıdır.

Örnek olarak, Marshall`ın talep eğrisi diğer faktörler sabitken fiyat (p) ve miktar (q) arasındaki ilişkiyi gösterir. Kısmi türev kullanarak, bu eğrinin eğimini $\frac{dq}{dp}$ bulabiliriz. Talebin temel kanunu, fiyat ve miktarın diğer faktörler sabitken ters yönde hareket ettiğini öngörür. Bunun matematiksel ifadesi ise, $\frac{dq}{dp} < 0$ `dir.

3.2. İkinci Dereceden Kısmi Türevler

Bir kısmi türevin kısmi türevi, bir fonksiyonun bir değişken tarafından alınan ikinci türevidir.

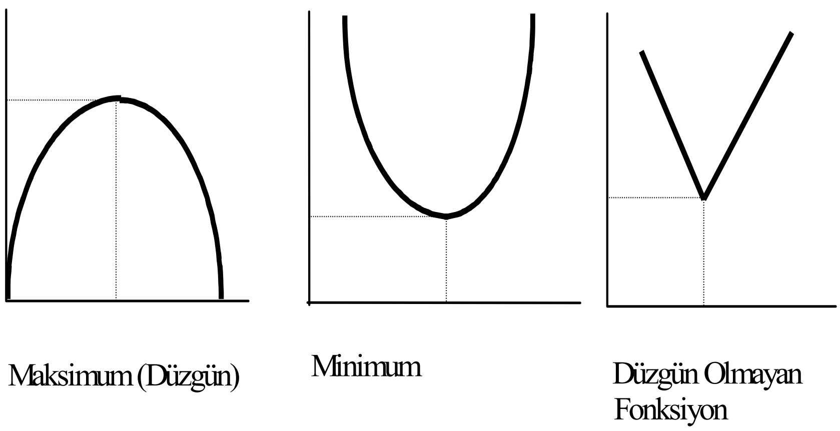
$\frac{\partial(\partial f / \partial x_i)}{\partial x_j}$ yada $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ yada f_{ij} olarak yazılabilir.

4. Optimizasyon Teknikleri

4.1. Tek Değişkenli Fonksiyonlar

Bir fonksiyonun maksimum noktası, bu noktadan daha yüksek bir nokta yoksa vardır. Minimum noktasına daha düşük bir nokta yoksa sahiptir. Fonksiyon maksimum veya minimum noktasında düzgünse, fonksiyonun bu noktadaki eğimi 0`dır. Maksimum veya minimuma optimum, bir optimum noktayı bulma tekniğine de *optimizasyon* adı verilir.

Minimuma ve maksimuma sahip eğriler, **Şekil 2**.`de grafikle gösterilmiştir. $x^*$ optimal değeri belirtir. Amaç fonksiyonu $y=f(x)$`dir. İktisatta optimum değerlere "*" işaretini koymak gelenektir. Bu yüzden $y^*=f(x^*)$ yazarız.



Sekil 2. Minimum ve Maksimum

4.1.1. Kritik Noktalar

Bir fonksiyonun eğiminin sıfır olduğu noktaya kritik nokta denir. Bu nokta maksimum veya minimum olabilir. Bazen de düz azalan veya artan bir parça da olması söz konusudur. Bu durumlarda, bu noktaya dönüm noktası denir. **Şekil 2**`de eğimin 0 olduğu noktada artan bir fonksiyonun dönüm noktasını görebiliriz. Burada x^* ne maksimum ne de minimumdur.

Bu durumdan dolayı, maksimum veya minimum veya dönüm noktasını bulmak için, ikinci derece türevlerden yararlanılmaktadır.

Maksimum noktasını bulmak için, ikinci türev negatif olmalıdır çünkü eğim fonksiyonu aşağıya doğrudur. Yani,

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \qquad (10) \text{ olur.}$$

Aynı şekilde, minimum için, ikinci türev negatif olmalıdır çünkü eğim fonksiyonu aşağıya doğrudur. Yani,

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \qquad (11)\text{ `dir.}$$

Kırılma noktasında ikinci türev 0`dır.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad (12)\text{`dir.}$$

4.1.2. Birinci ve İkinci Derece Koşullar

Bir maksimum veya minimum için, bir fonksiyonun türevinin sıfır (0) olması *gerekli koşuldur*. Buna *birinci derece koşul* da denir. Birinci derece koşul sağlanınca, ikinci türevler maksimum ve minimum için *yeterli koşul*lardır. Yani, birinci türev 0 ise, bir maksimum yada minimum vardır. Daha sonra ikinci türev sayesinde bu kritik noktanın ne olduğuna dair bilgiyi elde etmek için yeterli koşulu yerine getiririz.

4.2. Çok Değişkenli Fonksiyonlar

4.2.1. Kritik Noktalar

Çok değişkenli fonksiyonların kritik noktalarını bulmak tek değişkenli fonksiyonlarınkini bulmaya benzemektedir. Burada, iki değişkenli bir fonksiyondan hareketle işlem yapılmaktadır.

$$z=f(x,y) \qquad (13)$$

4.2.2. Birinci ve İkinci Derece Koşullar

$z=f(x,y)$ fonksiyonunun toplam diferansiyelini yazarsak,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (14)\text{ olur.}$$

dz=0 olması için,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = 0 \text{ ve } \frac{\partial z}{\partial y} = f_y = 0 \quad (15) \quad \text{dır.}$$

Bu koşula birinci–derece koşul denmektedir. *n* değişkenli fonksiyon için birinci derece koşul ise,

$f_1=f_2=........=f_n=0$ (16) olmalıdır.

Bu gerekli ama yeterli olmayan koşuldur.

İkinci derece, yeterli koşul, maksimum veya minimumu elde edilmesinde yardımcı olur.

Maksimum için yeterli koşul,

$d^2z=f_{xx}(dx)^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}(dy)^2 < 0$ (17) olacaktır.

Minimum için ise,

$d^2z > 0$ (18) olacaktır.

Sonuç olarak,

1) f_{xx} <0 ve f_{yy} <0 (maksimum için)
2) f_{xx} >0 ve f_{yy} >0 (minimum için)
3) $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2 > 0$ (hem maksimum hem de minimum için) dir.

4.3. Kapalı Fonksiyonlar

Matematiksel eşitlikler genellikle bir bağımlı değişkenden (*y*) ve bir veya daha fazla bağımsız değişkenden oluşur. Yalnız, bu bir ilişkiyi göstermenin tek yolu değildir. Örnek olarak,

$y=mx+b$ (19)`yi

$y-mx-b=0$ (20) olarak yazabiliriz.

Daha genel olarak,

$f(y,x,m,b)=0$ (21) yazılır.

Bu fonksiyonel notasyon x ve y`nin arasındaki eğim ($m$) ve parametre ($b$)`yle bağımlı bir ilişkiyi belirtir. Eşitlik (20) ve (21) şeklinde yazılan fonksiyonlar "*kapalı fonksiyonlar*" olarak da adlandırılır. Bu tip ilişkilerde, değişkenler ve parametreler kapalı şekilde eşitlik haline getirilmiştir.

4.3.1. Kapalı Fonksiyonlarda Türev

$\frac{dy}{dx}$'i eşitlik (19)`dan hesaplamak daha kolaydır. Ancak, $f(x,y)=0$ `ın türevi,

$0=f_x dx+f_y dy$ ise, $\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}$ (22) olur.

5. Kısıtlamalı Optimizasyon

5.1. Lagrange Çarpan Yöntemi

Kısıtlamalı optimizasyon problemlerini çözmenin en basit yolu *Lagrange çarpan yöntemidir* .Genel olarak,

$y=f(x_1,x_2,........,x_n)$ (23) fonksiyonunu

$g(x_1,x_2,........,x_n)=0$ (24) kısıtlamasıyla optimize ettiğimizi düşünelim.

Lagrange çarpan yöntemi aşağıdaki ifadenin kurulmasıyla başlar:

$£= f(x_1,x_2,........,x_n))+\lambda\, g(x_1,x_2,........,x_n)$ (25)

λ ek değişkeni Lagrange çarpanı olarak adlandırılır. Burada, birinci derece koşullar:

$$\frac{\partial £}{\partial x_1} = f_1 + \lambda g_1$$

$$\frac{\partial £}{\partial x_2} = f_2 + \lambda g_2$$

.
. (26)
.
.
.

$$\frac{\partial £}{\partial x_n} = f_n + \lambda g_n$$

$$\frac{\partial £}{\partial \lambda} = g(x_1,.....,x_n)$$ dır.

Bu koşullar, £ fonksiyonunun kritik noktalarının koşullarıdır. Burada, (n + 1) eşitlik (her x için ve λ için) ve n+1 bilinmeyen vardır ve (26)`deki son ifade ile çözüldüğünden, kısıtlamalı optimizasyon yapılmaktadır. Eşitlik (26) yalnızca maksimum ve minimum için gerekli koşuldur. İkinci derece koşulları da göz önüne almak zorunludur. Böylece minimizasyon veya maksimizasyon yapılabilir.

Kısıtlamalı optimizasyon için, ikinci dereceden koşulları kısıtlamasız optimizasyon tekniklerindeki ikinci dereceden koşullar gibidir. Maksimum için, amaç fonksiyonunun ikinci toplam diferansiyeli 0 (sıfır)`dan küçük olmalıdır. Formal biçimde gösterelim.

max $z=f(x,y)$

kısıtlama $g(x,y)=0$

Kısıtlama fonksiyonunun diferansiyelini alalım,

$dg=g_x dx+g_y dy=0$ (27)

Buradan,

$$dx = -\frac{g_x}{g_y}dy \quad (28)$$

Kısıtlanmamış maksimizasyon probleminde olduğu gibi,

$d^2z=f_{xx}(dx)^2–2f_{xy}dxdy+f_{yy}(dy)^2 < 0$

Kısıtlamalı maksimizasyon için, dx `in yerini değiştirelim.

$$d^2z = f_{xx}\left(-\frac{g_x}{g_y}dy\right)^2 + 2f_{xy}\left(-\frac{g_x}{g_y}dy\right)dy + f_{yy}(dy)^2$$

$$d^2z = \left(\frac{dy}{g_x}\right)^2\left[f_{xx}(g_c)^2 - 2f_{xy}g_xg_y + f_{yy}(g_x)^2\right] < 0$$ dir.

Minimum için,

$d^2z > 0$

Sınırlı Hessian matrisi sayesinde bu eşitsizliği çözeriz.

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & g_x \\ f_{xy} & f_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix} > 0$$ maksimum içindir.

Minimum için, $|H| < 0$ olmalıdır.