17.6 DÜZGÜN SÜREKLİLİK

(X, ρ) ile (Y, σ) iki metrik uzay olsun ve bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Tanım uyarınca, f fonksiyonunun bir x_0 noktasında sürekli olması için, $f(x_0)$ öğesinin her $B_\sigma(f(x_0), \epsilon)$ komşuluğuna karşılık,

$$f(B_\rho(x_0, \delta)) \subset B_\sigma f(x_0, \epsilon)$$

olacak biçimde, x_0 noktasının bir $B_\rho(x_0, \delta)$ komşuluğunun olması gerekli ve yeterlidir. Başka bir deyişle;

Tanım 17.6.1. $f : X \to Y$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\rho(x_0, x) < \delta \Rightarrow p(f(x_0), f(x)) < \epsilon$$

olacak biçimde, yalnız verilen x_0 noktasına ve ϵ sayısına bağlı olan, bir $\delta > 0$ sayısının var olmasıdır.

Metrik topolojilerin *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağladıklarını biliyoruz. Öyleyse, Teorem 11.2.2 uyarınca aşağıdaki özeliği söyleyebiliriz.

Teorem 17.6.1. *$f : X \to Y$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, her (x_n) dizisi için,*

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \tag{17.54}$$

olmasıdır.

Bu özelliği her noktada düşünürsek, *yaygın (global) süreklilik* için şu teoremi söyleyebiliriz.

Teorem 17.6.2. *$f : X \to Y$ fonksiyonunun sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, her x_n dizisi için,*

$$x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$$

olmasıdır.

Tanım 17.6.2. (X, ρ) ile (Y, σ) iki metrik uzay olsun ve bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\rho(x, y) < \delta \Rightarrow p(f(x), f(y)) < \epsilon$$

olacak biçimde, yalnız verilen ϵ sayısına bağlı, bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna *düzgün süreklidir*, denilir.

Düzgün süreklilik ile süreklilik tanımları birbirlerinden ayrıdır. Birinci fark metrik uzaylarda beliren farktır: Süreklilik tanımında, verilen ϵ sayısına karşılık varlığı söylenen δ sayısı hem ϵ sayısına hem de x_0 noktasına bağlıdır. Başka bir deyişle, ϵ sayısı sabit kalsa bile, x_0 noktası değişince δ sayısı da değişebilir. Düzgün süreklilikte ise, δ sayısı noktaya bağlı değildir. İkinci ayrılık ise, düzgün sürekliliğin her hangi bir topolojik uzay üzerinde tanımlanamamasıdır. Çünkü buradaki pozitif ϵ, δ sayıları ile verilen komşuluklar her hangi bir topolojik uzayda verilemez. Ancak, düzgün süreklilik kavramı, metrik uzaylardan daha genel olan *Düzgün Yapılar* üzerine genelleştirilir.[1]

Teorem 17.6.3. *(X, ρ) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subset X$ olsun. X den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan $x \to \rho(x, A)$ fonksiyonu düzgün süreklidir.*

İSPAT: Rasgele $x, y \in X$ öğeleri verilsin. Her $\epsilon > 0$ sayısına krşılık öyle bir $z \in A$ öğesi vardır ki

$$\rho(y, z) \leq \rho(y, A) + \epsilon$$

olur, ki buradan

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, A) + \epsilon$$

eşitsizliği çıkarılabilir. Öte yandan $\rho(x, A) \leq \rho(x, z)$ olduğu düşünülürse

$$\rho(x, A) \leq \rho(x, y) + \rho(y, A) + \epsilon$$

olur. Bu eşitsizlik her $\epsilon > 0$ sayısı için varolduğundan, $\epsilon \to 0$ iken de geçerlidir; yani

$$\rho(x, A) - \rho(y, A) \leq \rho(x, y)$$

olur. Benzer eşitsizliği, x ile y nin yerlerini değiştirerek de elde edebileceğimizden

$$|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y)$$

sonucu çıkar. Bu, aradığımız düzgün sürekliliktir.

Bu teoremde A kümesi yerine tek öğeli $\{y\}$ kümesini koyarsak şu sonucu elde ederiz:

Sonuç 17.6.1. *(X, ρ) metrik uzayından gerçel sayılara tanımlı olan $x \to \rho(x, y)$ fonksiyonu, her sabit y için, düzgün süreklidir.*

Teorem 17.6.4. *Her metrik uzay normal bir topolojik uzaydır.*

İSPAT: (X, ρ) bir metrik uzay olsun ve bunun kesişmeyen, kapalı iki alt kümesi A ve B olsun. Kolayca görüldüğü üzere

$$f(x) = \frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}$$

fonksiyonu Urysohn Aksiyomunu sağlar (bkz. Urysohn Teoremi 14.7.1).

17.6.1 Problemler

1. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri $(0, 1)$ aralığı üzerinde düzgün süreklidir?

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \\ f(x) &= x^3 \\ f(x) &= \sin x \\ f(x) &= \sin \frac{1}{x} \\ f(x) &= \frac{1}{1-x} \\ f(x) &= \frac{1}{2-x} \end{aligned}$$

2. Düzgün sürekli her fonksiyonun sürekli olduğunu gösteriniz.

3. Düzgün sürekli iki fonksiyonun bileşkesinin de düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

4. Sürekli olmayan bir fonksiyonun bir alt-uzaya kısıtlanmışı sürekli olabilir. Örneğin, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \quad \text{rasyonel} \\ 1, & x \quad \text{irrasyonel} \end{cases}$$

diye tanımlanan *Dirichlet fonksiyonu* sürekli değildir. Ama bunun **Q** rasyonel sayılar kümesine kısıtlaması süreklidir. Neden?

17.7 LİMİTLER ve CAUCHY DİZİLERİ

Bir topolojik uzaydaki (x_n) dizisinin yakınsak olmasını tanımlamıştık. Bu kesimde metrik uzaylardaki dizilerin yakınsaklığını inceleyeceğiz. `Teorem` 17.3.3 uyarınca, $\{B_\rho(x,r), r > 0\}$ ailesi x noktasının bir yerel tabanı olduğundan, (bkz. `Tanım` 11.1.2, $(X, \mathscr{T}_\rho)$ metrik uzayında şuna denk olacaktır:

Teorem 17.7.1. *(X,ρ) metrik uzayındaki (x_n) dizisinin x noktasına yakınması için gerekli ve yeterli koşul, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x) < \epsilon$$

olacak biçimde bir n_0 doğal sayısının var olmasıdır.

(x_n) dizisinin x noktasına yakınsadığını, kısaca,

$$x_n \to x$$
$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$$

gösterimlerinden birisiyle belirteceğiz ve x noktasına (x_n) *dizisinin limiti*, diyeceğiz. Metrik uzaylar Hausdorff ayırma aksiyomunu sağladığından, `Teorem` 14.3.1 uyarınca hemen şunu söyleyebiliriz:

Teorem 17.7.2. *(X,ρ) metrik uzayındaki bir (x_n) dizisinin ençok bir limiti var olabilir.*

Metrik uzaylar Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağladığından `Önerme` 11.2.1 den şu çıkar:

Teorem 17.7.3. *Metrik uzayın her hangi bir alt kümesi A olsun. $a \in \bar{A}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $a_n \to a$ olacak biçimde bir $(a_n) \subset A$ dizisinin var olmasıdır.*

Tanım 17.7.1. (X,ρ) metrik uzayında bir (x_n) dizisi verilsin. Eğer her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık $m, n \geq n_0$ olduğunda $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$ olacak biçimde, verilen ϵ sayısına bağlı, bir n_0 doğal sayısı varsa, (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisidir*, denilir.

Örnek 17.7.1. salt metriğe göre, doğal sayılardan oluşan (n) dizisi bir *Cauchy dizisi* değildir. Çünkü n ile m ne denli büyük seçilirse seçilsin $n \neq m$ olduğunda $\mathfrak{s}(n,m) = |n - m| \geq 1$ olur.

Bir dizinin *Cauchy dizisi* olup olmaması metrik bir niteliktir. Bunu göstermek için, yukarıdaki dizinin başka bir metriğe göre Cauchy olduğunu gösterelim.

Örnek 17.7.2. ν metriği Örnek (17.37) ile tanımlanan metrik olmak üzere (n) doğal sayılar dizisi $(\mathbb{R}, \nu)$ uzayı içinde bir *Cauchy dizisidir.*

İSPAT: her hangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Genelliği bozmadan $n > m$ alabiliriz. Buradan

$$\nu(n,m) = \left| \frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m} \right| \leq \frac{1}{(1+m)}$$

eşitsizliği çıkar. Dolayısıyla

$$\frac{(1-\epsilon)}{\epsilon} < n_0$$

olacak biçimde doğal bir n_0 sayısı seçersek

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \nu(n,m) < \epsilon$$

çıkar; yani doğal sayılar dizisi μ metriğine göre bir *Cauchy dizisi* olur.

Teorem 17.7.4. *Bir metrik uzayda yakınsak her dizi bir* Cauchy *dizisidir.*

İSPAT: (x_n) dizisi x noktasına yakınsıyorsa, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir n_0 doğal sayısı vardır ki

$$n \geq n_0 \Rightarrow (\rho(x, x_n)) < \frac{\epsilon}{2}$$

yazılabilir. Bu ikisinden ve [M3] den

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x, x_m) < \epsilon$$

çıkar ki bu isteneni verir.

Bu teoremin karşıtı, çoğunlukla geçersizdir; yani bir metrik uzaydaki her Cauchy dizisi, o uzay içinde bir limite yakınsamayabilir. Bu nitelik, metrik uzayların tamlanması (completion) olgusuna yol açar.

Örnek 17.7.3. $a = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$ sonsuz onlu (decimal) gösterimiyle temsil edilen bir irrasyonel sayı düşünelim. Bu sayıya karşılık aşağıdaki diziyi kuralım.

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_1 \\
x_2 &= 0, a_1 a_2 \\
x_3 &= 0, a_1 a_2 a_3 \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} \\
x_n &= 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n
\end{aligned}$$

Bu dizinin terimleri birer rasyonel sayıdır ve kolayca görüleceği gibi, rasyonel sayılar kümesi üzerindeki salt değer metriğinin tanımladığı $(\mathbf{Q}, \mathfrak{s})$ metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. Öte yandan bu dizinin a limitine yakınsadığı da hemen görülebilir. Ama a sayısı irrasyonel olduğundan $\mathbf{Q}$ içinde değildir. Demek ki $(\mathbf{Q}, \mathfrak{s})$ metrik uzayındaki bu (x_n) Cauchy dizisi $\mathbf{Q}$ içndeki bir limite yakınsamıyor, bu uzayın bir üst uzayı olan $(\mathbb{R}, \mathfrak{s})$ içindeki bir limite yakınsıyor. Sonraki bölümde bu olguyu daha genel biçimde inceleyeceğiz.

17.7.1 Problemler

1. Gerçel ya da karmaşık sayılardan oluşan bir (x_n) dizisinin, salt topolojiye göre, bir x limitine yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

   $$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon$$

   olacak biçimde yalnız ϵ 'a bağlı doğal bir n_0 sayısının var olmasıdır. Gösteriniz.

2. Bir metrik uzayda yakınsak her dizi sınırlıdır. Gösteriniz.

3. Alt uzayda yakınsak dizi üst uzayda da yakınsar. Neden? Bu önermenin tersi doğru mudur?

4. Bir metrik uzay içindeki (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul $E_n = \{x_k : k \geq n\}$ olmak üzere $\rho(E_n) \to 0$ olmasıdır. İspatlayınız.

5. Bir Cauchy dizisinin her hangi bir alt dizisinin de bir Cauchy dizisi olacağını gösteriniz.

6. (X, ρ) bir metrik uzay ve $\sigma(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$ olsun. X içindeki bir (x_n) dizisinin ρ metriğine göre bir Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul σ metriğine göre bir Cauchy dizisi olmasıdır. Gösteriniz.

7. Bir Cauchy dizisinin düzgün sürekli bir fonksiyon altındaki resminin de bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

17.8 TAMLIK

Tanım 17.8.1. (X, ρ) metrik uzayındaki her *Cauchy dizisi* X içindeki bir limite yakınsarsa, (X, ρ) metrik uzayı *tamdır (complete)* denilir.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi, *salt değer* metriğine göre rasyonel sayılar tam olmayan bir metrik uzaydır. Aynı metriğe göre gerçel sayılar kümesinin *tamlığını* biraz sonra göreceğiz.

Teorem 17.8.1. *[Cantor arakesişme özelliği] (X, ρ) tam bir metrik uzay ve (F_n) boş olmayan kapalı kümelerden oluşan azalan bir dizi olsun. Eğer $\rho(F_n) \to 0$ ise*

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

arakesitinin birtek öğesi vardır.

İSPAT: Dizinin çapları azalarak sıfıra gittiğinden F arakesiti farklı iki nokta içermez. (Neden?) Öyleyse, F nin boş olmayacağını göstermek yetecektir. Her bir F_n kümesinden bir x_n öğesi seçelim. $\rho(F_n) \to 0$ olduğundan x_n bir Cauchy dizisi olacaktır. Neden? X tam olduğundan, bu dizinin bir $x \in X$ limiti vardır. Bu X noktasının F arakesitine ait olduğunu göstermek yetecektir. Yani her m doğal sayısı için $x \in F_m$ olduğunu göstermeliyiz. $x_n \to x$ olduğundan, bu dizinin her alt dizisi de x limitine yakınsayacaktır. Her m doğal sayısı için $\{x_n : n \geq m\}$ alt dizisi F_m kümesine aittir.

Şimdi bu önermenin karşıtını söyleyelim.

Önerme 17.8.1. *Bir metrik uzayda hiç birisi boş olmayan ve çapları sıfıra giden iç-içe kapalı kümelerden oluşan her dizinin arakesiti boş değilse bu uzay tamdır.*

İSPAT: (X, ρ) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir Cauchy dizisi olsun. Bu dizinin X uzayı içindeki bir limite yakınsadığını göstereceğiz.

$$A_n = \{x_k : k \geq n\}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

kümeler dizisini kuralım. Bu dizinin boş olmayan kümelerden oluştuğu ve iç-içe olduğu; yani

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$$

olduğu apaçıktır. Öte yandan

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\bar{A}_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(A_n) = 0 \tag{17.55}$$

dır. Neden? Öyleyse, varsayımımız uyarınca enaz bir

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$$

öğesi varolmalıdır. Eğer $x_n \to x$ olduğnu gösterebilirsek ispat bitecektir. her hangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. (17.55) gereğince, öyle bir n_0 doğal sayısı vardır ki

$$\rho(\bar{A}_{n_0} < \epsilon)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow x_n, x \in \bar{A}_{n_0} \\ &\Rightarrow \rho(x_n, x) < \epsilon \end{aligned}$$

çıkar.

Önerme 17.8.2. *Bir metrik uzayda tam olan her alt uzay kapalıdır.*

İSPAT: (X, ρ) metrik uzayının bir (A, ρ) alt uzayı tam olsun. $\bar{A} \subset A$ olduğunu göstermek yetecektir. $x \in \bar{A}$ ise, `Teorem` 17.7.3 uyarınca, $x_n \to x$ olacak biçimde bir $(x_n) \subset A$ dizisi vardır. Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisi olduğundan (x_n) de bir *Cauchy dizisidir*. Öyleyse, bu dizinin limiti olan x noktası *tam* olan A uzayına ait olacaktır.

Önerme 17.8.3. *Tam bir uzayın kapalı her alt uzayı da tamdır.*

İSPAT: (X, ρ) tam bir uzay ve $A \subset X$ kapalı bir alt küme olsun. $(x_n) \subset A$ bir Cauchy dizisi ise, tam X uzayı içinde bir x limitine yakınsar. `Teorem` 17.7.3 uyarınca $x \in \bar{A}$ çıkar. Oysa A kapalı olduğundan $A = \bar{A}$ dır. Demek ki A içindeki her *Cauchy dizisinin* limiti, A içindedir.

Son iki önermeyi birleştirirsek şunu söyleyebiliriz:

Teorem 17.8.2. *(X, ρ) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olduğunda aşağıdaki iki özelik eşdeğerdir:*

(i) $A = \bar{A}$

(ii) A tamdır.

Önerme 17.8.4. *(X, ρ) bir metrik uzayında sınırlı ve kapalı olan her alt küme tam bir alt uzay oluyorsa (X, ρ) uzayı da tamdır.*

İSPAT: $(x_n) \subset X$ bir Cauchy dizisi olsun.

$$m, n \geq p \quad \Rightarrow \quad \rho(x_n, x_m) \leq 1$$

olacak biçimde bir p doğal sayısı seçelim. her hangi bir $a \in X$ seçelim ve

$$r = \sup\{\rho(a, x_1), \rho(a, x_2), \ldots, \rho(a, x_p)\}$$

diyelim. Bu durumda $1 \leq j \leq p$ olduğunda $x_j \in D(a, r) \subset B(a, r+1)$ olur. Ayrıca $j \geq p$ olduğunda

$$\rho(a, x_j) \leq \rho(a, x_p) + \rho(x_p, x_j) \leq r + 1$$

olacaktır ki bu $j \geq p$ için $x_j \in D(a, r+1)$ olmasını gerektirir. Öyleyse

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset D(a, r+1)$$

dir. Öte yandan kapalı $D(a, r+1)$ yuvarının (disk) sınırlı olduğu açıktır; dolayısıyla varsayımımız uyarınca *tam bir alt uzaydır* ve (x_n) Cauchy dizisinin bu kapalı yuvar içinde bulunan bir x limiti vardır, ki bu limit X uzayı içindedir. X içindeki her Cauchy dizisi için aynı şey yapılabileceğinden, ispat biter.

17.8.1 Problemler

1. `Örnek` 17.2.1 teki uzayın tam olduğunu gösteriniz.

2. Sonlu bir metrik uzayın tam olduğunu gösteriniz.

3. `Örnek` (17.41) te tanımlanan $\mathfrak{B}(X)$ uzayının tam olduğunu gösteriniz.

17.9 TAMLAMA

Tanım 17.9.1. (X, ρ) metrik uzayı bir (Y, σ) tam metrik uzayı içine gömülebiliyor ve bu *gömü (embedding)* yoğun bir alt uzaya eşit oluyorsa, (Y, σ) uzayına (X, ρ) uzayınının *tamlanmışıdır*, denilir.

Bu kesimde her metrik uzayın tamlanabileceğini ve bir metrik uzayın tamlanmışlarının *eşmetrel eşyapılı* olduklarını göstereceğiz. Matematiğin bir çok dalında önem taşıyan bu olgu, özel olarak, rasyonel sayılardan hareketle gerçel sayıların topolojik yöntemle kuruluşunu sağlar.

Teorem 17.9.1. *Her metrik uzay tamlanabilir. Bir metrik uzayın tamlanmışları birbirlerine* eşmetrel eşyapılıdır.

İSPAT: İspat birkaç adımda bitecektir. Bu adımların zor olmayan uzunca ispatları öğrenciye alıştırma diye bırakılacaktır. Burada yalnızca ispatın iskeleti verilecektir.

1.Adım: $x = (x_n)$ ile $y = (y_n)$ dizileri (X, ρ) uzayında iki Cauchy dizisi ise

$$x \cong y \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$$

bağıntısını tanımlayalım. $\cong$ ile gösterdiğimiz bu bağıntının X uzayındaki bütün Cauchy dizilerinin oluşturduğu küme üzerinde bir *denklik bağıntısı* olduğu kolayca görülebilir.

2.Adım: Yukarıdaki denklik bağıntısının kurduğu *denklik sınıfları* kümesini $\mathfrak{X}$ ile gösterelim; yani $x = (x_n)$ öğesinin denklik sınıfı

$$[x] = \{y = (y_n) : x \cong y\}$$

olsun. Şimdi

$$\psi([x], [y]) := \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

olmak üzere $(\mathfrak{X}, \psi)$ bir metrik uzay olur.

3.Adım: Her $x \in X$ öğesine karşılık, terimleri bu x öğesine eşit olan $\mathfrak{x} = (x, x, x, \ldots, x, \ldots)$ sabit dizilerini düşünelim. Bu dizilerin belirlediği $\mathfrak{x}$ denklik sınıfları $\mathfrak{X}$ uzayına aittirler ve bir $\mathcal{X}$ alt uzayını oluştururlar. Şimdi X kümesinden $\mathfrak{X}$ kümesine $\varphi(x) = \mathfrak{x}$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm,

$$\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \psi(\varphi(x), \varphi(y)) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$$

uyarınca (X, ρ) uzayından $(\mathcal{X}, \psi)$ alt uzayına bir eşmetrel eşyapı dönüşümüdür.

4.Adım: $\mathcal{X}$ kümesinin $\mathfrak{X}$ içinde yoğun olduğunu göstereceğiz. `Teorem` 17.7.3 uyarınca, $\mathfrak{X}$ içindeki her $\mathfrak{p}$ öğesine karşılık, $\mathcal{X}$ içinde $\mathfrak{p}$ öğesine yakınsayan bir dizinin varlığını göstermek yetecektir. Gerçekten, $\mathfrak{p}$ denklik sınıfına ait bir $p = (p_n)$ dizisi düşünelim. Tanımı uyarınca, bu dizi X içinde bir *Cauchy* dizisidir. Şimdi her m doğal sayısına karşılık

$$\varphi(p_m) = \mathfrak{p}_m$$

denklik sınıfını düşünelim.

$$\lim_{n\to\infty} \psi(\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}) = \lim_{m\to\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} \rho(p_m, p_n) \Big) = 0$$

olduğundan $(\mathfrak{p}_m)$ dizisi $\mathfrak{p}$ öğesine yakınsar.

5.Adım: $(\mathfrak{X}, \psi)$ bir tam uzaydır.

Bunu ispatlamk için $\mathfrak{X}$ içindeki her *Cauchy dizisinin* bu uzay içinde bir limite yakınsadığını göstermek yetecektir. $(\mathfrak{x}_n)$ dizisi $\mathfrak{X}$ içinde bir Cauchy dizisi olsun. $\mathcal{X}$ uzayı $\mathfrak{X}$ içinde yoğun olduğundan, her doğal n sayısına karşılık

$$\psi(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{x}_n) < 1/n$$

olacak biçimde bir $\mathfrak{a}_n \in \mathcal{X}$ öğesi vardır. Bu öğelerden oluşan $(\mathfrak{a}_n)$ dizisi bir *Cauchy dizisidir*. Bu dizi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ dizisinin denklik sınıfı olan $\mathfrak{a}$ öğesine yakınsar. Artık, buradan x_n dizisinin $\mathfrak{a}$ limitine yakınsayacağı kolayca görülür.

6.Adım: $\mathfrak{X}$ ile $\mathfrak{Y}$ metrik uzayın iki *tamlanmışı* ise $\mathfrak{X}$ ile $\mathfrak{Y}$ uzayları eşmetrel eşyapılıdır.

17.10 BAIRE SINIFLANDIRMASI

Tanım 17.10.1. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesinin kaplamının içi boş ise; yani $(\bar{A})^o = \emptyset$ ise, A kümesine *hiç bir yerde yoğun değildir* denilir.

Örnek 17.10.1. Açık ya da kapalı kümelerin kenarları hiç bir yerde yoğun değildir.

Örnek 17.10.2. Tamsayılar kümesi gerçel sayılar içinde, salt topolojiye göre, hiç bir yerde yoğun değildir.

Önerme 17.10.1. *A hiç bir yerde yoğun değilse A' kümesi yoğun bir alt-kümedir.*

Bu önermenin kolay ispatını öğrenciye bir problem olarak bırakıyoruz.

Tanım 17.10.2. Eğer bir topolojik uzay hiç bir yerde yoğun olmayan kümelerin sayılabilir sayıdasının bileşimine eşitse, bu topolojik uzaya *seyrek* bir uzaydır denilir. Seyrek uzaylara *birinci kategoriden* bir uzay; bu kategoriden olmayan uzaylara da *ikinci kategoridendir* diyeceğiz.

Örnek 17.10.3. Tek öğeli bir alt-küme, salt topolojiye göre, $\mathbb{Q}$ içinde hiç bir yerde yoğun değildir.

Dolayısıyla, sayılabilir bir küme olan rasyonel sayılar kümesi, salt topolojiye göre, birinci kategoriden (seyrek) bir uzaydır.

Tanım 17.10.3. Bir topolojik uzayda hiç bir yerde yoğun olmayan kapalı kümelerin her dizisinin bileşimi de hiç bir yerde yoğun değilse, bu uzaya bir *Baire* uzayıdır denilir.

Tanımdan hemen şunu söyleyebiliriz.

Teorem 17.10.1. *$(X, \mathscr{T})$ uzayının bir Baire uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul, kapalı kümelerden oluşan her hangi bir (E_n) dizisi verildiğinde*

$$(\cup E_n)^o \neq \emptyset \Longrightarrow E_m^o \neq \emptyset$$

olacak biçimde enaz bir E_m kümesinin varolmasıdır.

Teorem 17.10.2 (Baire Yoğunluk Teoremi)**.** *(X, ρ) bir tam metrik uzay ve $B_i, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$ yoğun alt kümeler ailesi ise $\cap_{i=1}^{\infty} B_i$ arakesiti X içinde yoğundur.*

İSPAT: her hangi bir $p \in X$ öğesi ile bunun bir $B(p, r)$ yuvarsal komşuluğunu düşünelim. Göstereceğiz ki bu yuvar $\cap_{i=1}^{\infty} B_i$ ye ait enaz bir a öğesini içerir.

$B(p, r)$ açık bir küme ve B_1 yoğun olduğundan bir $a_1 \in B(p, r) \cap B_1$ öğesi seçilebilir. Öte yandan $(X, \mathscr{T}_\rho)$ düzenli olduğundan

$$\overline{B(a_1, r_1)} \subset B(p, r) \cap B_1$$

olacak biçimde a_1 öğesinin bir $B(a_1, r_1)$ yuvarsal komşuluğu vardır. Üstelik, bu komşuluğun r_1 yarıçapı 1 den küçük alınabilir.

$B(a_1, r_1)$ açık bir küme ve B_2 yoğun olduğundan bir $a_2 \in B(a_1, r_1) \cap B_2$ öğesi seçilebilir. Yeniden, metrel topolojinin düzenliliği

$$\overline{B(a_2, r_2)} \subset B(a_1, r_1) \cap B_2$$

olacak biçimde, a_2 öğesinin bir $B(a_2, r_2)$ yöresinin olmasını gerektirir. Tabii $r_2 < 1/2$ olacağı açıktır.

Bu düşünüş ardarda yinelenerek, i -nci adımda $(i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$

$$a_i \in B(a_i, r_i), r_i < 1/i$$

ve

$$\overline{B(a_i, r_i)} \subset B(a_{i-1}, r_{i-1}) \cap B_i$$

olacak biçimde bir a_i öğesi seçilebilir.

Şimdi bu yolla seçilen öğelerden oluşan (a_i) dizisini düşünelim. Eğer k bir doğal sayı ise $n, m > k$ olduğunda $a_n, a_m \in B(a_k, r_k)$ olur; dolayısıyla $d(a_n, a_m) < 2/k$ olcaktır.

Buradan (a_i) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür. (X, ρ) bir tam uzay olduğundan bu dizinin X içinde bir limiti vardır; bu limite a diyelim. Öte yandan, her i doğal sayısı için $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots$ alt dizisi de aynı a limitine yakınsar. Bu alt dizinin bütün terimleri $B(a_i, r_i)$ kümesince kapsanır. Bu küme kapalı olduğundan a limitini de içerecektir (bkz. `Teorem` 17.7.3). Bu ise

$$a \in \overline{B(a_i, r_i)} \subset B(a_{i-1}, r_{i-1}) \cap B_i$$

olması demektir. Her i doğal sayısı için bu özelliğin varlığı

$$a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$$

olmasını gerektirir, ki bu aradığımız sonuçtur.

Teorem 17.10.3 (Baire). *Tam bir metrik uzay ikinci kategoridendir.*

İSPAT: X tam bir metrik uzay olsun. Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. hiç bir yerde yoğun olmayan alt-kümelerden oluşan bir (A_n) dizisi verilsin. Eğer

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \tag{17.56}$$

olsaydı

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A'_n = \emptyset \tag{17.57}$$

olurdu. Oysa her n için A'_n yoğundur (bkz. Önerme 17.10.1). Öyleyse *Baire Yoğunluk Teoremi* uyarınca $\cap A'_n$ yoğun bir alt-kümedir. Bu ise, (17.57) ile çelişir. Bu çelişki olamayacağından (17.56) kabulümüz yanlıştır; yani X kümesi hiç bir yerde yoğun olmayan kümelerin sayılabilir sayıdasının bir bileşimine eşit olamaz.

17.10.1 Problemler

1. Salt topolojiye göre gerçel sayıların sonlu bir alt-kümesi hiç bir yerde yoğun değildir. Gösteriniz.

2. Hiç bir yerde yoğun olmayan kümelerin sonlu sayıdasının bileşimi de hiç bir yerde yoğun değildir. Gösteriniz.

3. Hiç bir yerde yoğun olmayan bir kümenin tümleyeni yoğun bir alt kümedir. Gösteriniz.

4. Yukarıdaki özeliğin karşıtı doğru mudur? Başka bir deyişle, *"yoğun bir alt-kümenin tümleyeni hiç bir yerde yoğun değildir"*, denebilir mi?

17.11 TAMLIK VE TIKIZLIK

Teorem 17.11.1. *Bir metrik uzayın tıkız olması için gerekli ve yeterli koşul içindeki her dizinin yakınsak bir alt dizisi olmasıdır.*

İspat: Önce koşulun gerekliğini görelim. $(X, \mathscr{T}_\rho)$ tıkız bir metrik uzay olsun ve X içinde bir (x_n) dizisi verilsin. Bu dizinin terimlerinin birbirlerinden farklı olduğu durumu düşünmek yetecektir. Çünkü, eğer dizinin birbirlerinden farklı terimleri sayısı sonlu ise, enaz bir terim sonsuz kez yineleniyor demektir; ki bu durumda, istenen yakınsak alt dizi olarak yinelenen terimlerden oluşan bir alt dizi seçilebilir. Eğer dizinin sonsuz çoklukta farklı terimi varsa, birbirlerine eşit olan terimlerden yalnız bir tanesini seçerek, terimleri birbirinden farklı sonsuz bir alt dizi seçebiliriz. Kolaylığı sağlamak için verilen (x_n) dizisinin, bu dizi olduğunu varsaymakta bir sakınca yoktur.

(x_n) dizisi sonsuz bir kümedir. X tıkız olduğundan, bu dizinin enaz bir yığılma noktası olcaktır (bkz. Teorem **??**); bu yığılma noktasına p diyelim. Yığılma noktası tanımı uyarınca, her k doğal sayısına karşılık, $B(p, 1/k)$ açık yuvarı içinde diziye ait bir $x_n^{(k)}$ öğesi seçilebilir. Böylece oluşturulacak $(x_n^{(k)})$ alt dizisinin p noktasına yakınsayacağı apaçıktır.

Koşulun yeterliğini göstermek için $(X, \mathscr{T}_d)$ metrik uzayındaki her dizinin yakınsak bir alt dizisi olduğunu varsayalım. Şimdi X kümesinin sonsuz bir A alt kümesi verilsin. A kümesinden, terimleri birbirinden farklı olan bir (x_n) dizisi seçebiliriz. Varsayımımız uyarınca, bu dizinin yakınsak bir alt dizisi olacaktır. Bu alt dizinin limitine p diyelim. `Teorem` 17.7.3 uyarınca, $p \in \bar{A}$ dır. Öte yandan, dizinin terimleri birbirlerinden farklı olduğu için, p nin her komşuluğu diziye ait kimi terimleri içerecektir; yani p noktası A nın bir yığılma noktasıdır. Sonsuz her A kümesi için bu özelik varolduğundan, `Önerme` 15.1.1 uyarınca, X metrik uzayı tıkızdır.

Teorem 17.11.2. *Bir metrik uzaydaki bir Cauchy dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa, dizinin kendisi de yakınsaktır ve aynı limite sahiptir.*

İSPAT: (x_n) bir Cauchy dizisi dizisi ise, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$n, m \geq N \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak biçimde doğal bir N sayısı vardır. Eğer bu dizinin yakınsak alt dizisi $(x_n^{(k)})$ ve bu bnun limiti p ise

$$n \geq M \Rightarrow \rho(x_n^{(k)}, p) < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak biçimde doğal bir M sayısı vardır. N ile M sayılarından hangisi daha büyükse ona n_0 diyelim. $n \geq n_0$ olduğunda

$$\rho(x_n, p) \leq \rho(x_n, x_n^{(k)}) + \rho(x_n^{(k)}, p) < \epsilon$$

olacağından, $x_n \to p$ olduğu görülür.

Teorem 17.11.3. *Bir metrik uzayda tıkız alt kümeler tamdır.*

İSPAT: Metrik bir uzayda A tıkız bir alt küme ve (x_n) bu küme içinde bir Cauchy dizisi olsun. *Bolzano-Weierstrass* özelliğinden, bu dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır ve bunun limiti, p diyelim, A kümesine aittir. Oysa önceki teorem uyarınca $x_n \to p$ olacaktır. Demek ki A alt kümesindeki her Cauchy dizisi A içindeki bir limite yakınsıyor.

Sonuç 17.11.1. *Bir metrik uzayın sınırlı ve kapalı her alt kümesi tıkız ise bu uzay tamdır.*

İSPAT: Önceki teoremden, verilen varsayım altında sınırlı ve kapalı kümelerin tam olduğu sonucu çıkar. Bu ise uzayın tam olmasını gerektirir (bkz. `Önerme` 17.8.4).

Önerme 17.11.1. *Bir metrik uzayın büsbütün sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul, bu uzaydaki her dizinin bir Cauchy alt dizisinin var olmasıdır.*

İSPAT:

Gerekliği: X metrik uzayı büsbütün sınırlı olsun ve her hangi bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. Bu dizinin bir Cauchy alt dizisi olduğunu göstereceğiz. Önce X kümesinin sonlu bir 1-örtüsünü düşünelim. Bu örtüye ait kümelerden enaz birisi dizinin sonsuz çoklukta öğelerini içerecektir. Bu öğeler

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots \tag{17.58}$$

olsun. Bu alt dizinin çapı 1 den küçüktür. Sonra X kümesinin sonlu bir $1/2$ örtüsünü düşünelim. Bu örtüye ait kümelerden enaz birisi (17.58) dizisine ait terimlerin sonsuz sayıdasını içerecektir. Bu öğeler

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots \tag{17.59}$$

olsun. Bu alt dizinin çapı $1/2$ en küçüktür. Bu düşünüşle, doğal her n sayısına karşılık, X kümesinin sonlu bir $1/n$ örtüsü var olacağından, bu örtüye ait enaz bir küme içinde sonsuz çoklukta

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots \tag{17.60}$$

öğeleri bulunur. Bu öğelerden oluşan alt dizinin çapı 1 den küçüktür. Böylece elde edilen $(17.58), (17.59), \ldots, (17.60), \ldots$ alt dizilerinden her birisi bir öncekinin bir alt-dizisi olmaktadır. Bu dizilerin birincisinden $x_1^{(1)}$, ikincisinden $x_2^{(2)}, \ldots$, k -ıncıdan $x_k^{(k)}$, ... öğesini seçerek, adına *köşegen dizisi* diyeceğimiz

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, \ldots, x_n^{(n)}, \ldots \tag{17.61}$$

dizisini oluşturalım. Bu dizinin bir Cauchy dizisi olduğu

$$n, m > n_0 \Rightarrow d(x_n^{(n)}, x_m^{(m)}) < \frac{1}{n_0} \tag{17.62}$$

eşitsizliğinden çıkar.

Yeterliği: X metrik uzayındaki her dizinin bir Cauchy alt dizisi var olsun. Eğer X büsbütün sınırlı olmasaydı yeterince küçük bir ϵ sayısı için, sonlu bir ϵ-örtüsü varolmazdı. Bu durumda her hangi bir $a_1 \in X$ öğesi seçelim ve $\epsilon/3$ yarıçaplı a_1 merkezli B_1 açık yuvarını düşünelim. Kabulümüz uyarınca B_1 yuvarı X kümesini örtemeyeceğinden bu yuvar dışında bir $a_2 \in X$ öğesi seçilebilir. Bu öğeyi merkez alan $\epsilon/3$ yarıçaplı B_2 yuvarını düşünelim. Gene $B_1 \cup B_2$ kümesi X uzayını örtemeyeceğinden bu bileşim dışında bir $a_3 \in X$ öğesi seçilebilir. Bu düşünce ardarda yinelenerek bir

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \tag{17.63}$$

dizisini öyle seçebiliriz ki, bu dizinin her hangi iki öğesi arasındaki uzaklık $\epsilon/3$ den büyük olur. Dolayısıyla bu dizinin bir Cauchy alt dizisi var olamaz. Bu bir çelişkidir.

Önerme 17.11.2. *Bir metrik uzayın tıkız olması için gerekli ve yeterli koşul tam ve büsbütün sınırlı olmasıdır.*

Gerekliği: X tıkız bir metrik uzay ise, `Teorem` 17.11.1 uyarınca, içindeki her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu alt dizi bir Cauchy dizisi olacağından, `Önerme` 17.11.1 uyarınca X uzayı büsbütün sınırlıdır. Tamlığı ise `Teorem` 17.11.3 çıkar.

Yeterliği: X metrik uzayı tam ve büsbütün sınırlı olsun. `Önerme` 17.11.1 uyarınca, X içindeki her dizinin bir Cauchy alt dizisi vardır. Uzay tam olduğundan, bu alt dizinin bir limiti olacaktır. Yani X içindeki her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Artık uzayın tıkızlığı `Önerme` 17.11.1 den çıkar.

17.11.1 Problemler

1. Tıkız bir metrik uzaydan her hangi bir metrik uzaya tanımlı sürekli bir fonksiyonun düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

2. Gerçel eksenin tıkız her alt kümesinin sınırlı ve kapalı olduğunu gösteriniz.

17.12 GERÇEL SAYILARIN TAMLIĞI

Gerçel sayıların *Dedekind kesimi* yöntemiyle nasıl kurulduğunu öğrenci Analiz derslerinden bilir. Metrik uzaylarda tamlama kavramı bilindikten sonra gerçel sayıları kurmak çok kolaylaşır. Rasyonel sayılar kümesi üzerinde salt (mutlak) metriği düşünelim. Bu uzayın tamlanmışını *Gerçel Sayılar* kümesi olarak tanımlayabiliriz. Gerçekten rasyonel sayılar kümesinin salt topolojiye göre gerçel sayılar kümesi içinde yoğun olduğunu biliyoruz (bkz. 4.1.2). Ancak $(\mathbb{Q}, |\ |)$ uzayının tamlanmışını $(\mathbb{R}, |\ |)$ metrik uzayı olduğunu göstermek için, buraya dek *Dedekind Kesimi* yöntemiyle kurulduğunu varsaydığımız $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin $|\ |$ salt metriğine göre tam bir uzay olduğunu göstermeliyiz. Bu işi yaparken gerçel sayıların sıralamasına değin özellikleri biliniyor varsayacağız.

Önerme 17.12.1. *Gerçel eksen üzerinde kapalı ve iç-içe olan aralıklardan oluşan bir dizinin arakesiti boş değildir.*

İSPAT: $I_n \supset I_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$ olmak üzere $I_n = [a_n, b_n]$ kapalı aralıklarını düşünelim. $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi boş değildir ve üstten b_1 ile sınırlıdır. *Gerçel* sayılardaki sıralama özelliğinden ([1], [22]), A kümesinin en küçük üst sınırı vardır.

$$x = \sup(A)$$

diyelim. Varsayımımız uyarınca her m, n doğal sayı çifti için

$$a_m \leq a_{m+n} \leq b_{m+n} \leq b_m$$

olduğu apaçıktır. Öyleyse, her m için

$$a_m \leq x \leq b_m$$

dir: yani

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \{I_m : m \in \mathbb{N}\}$$

olur.

Önerme 17.12.2. *Gerçel eksen üzerinde kapalı ve iç-içe olan aralıklardan oluşan bir dizide aralıkların uzunluğu sıfıra yaklaşıyorsa, arakesitleri bir tek nokta içerir.*

İSPAT: $I_n, \quad (n = 1, 2, 3, ...)$ kapalı aralıklarının uzunluğu sıfıra yaklaşıyor demek , her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\mathfrak{s}(x, y) = |x - y|$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{s}(I_n) = \lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$$

olması demektir. x ile y öğeleri arakesit içinde olsunlar.

$$x \neq y \Rightarrow |x - y| = r > 0 \tag{17.64}$$

olacaktır. $\mathfrak{s}(I_n) \to 0$ olduğundan

$$n > n_0 \Rightarrow \mathfrak{s}(I_n) = b_n - a_n < \frac{1}{2}r \tag{17.65}$$

olacak biçimde doğal bir n_0 sayısı vardır. x ile y arakesit içinde olduğundan, her n için $x, y \in I_n$ dir. Öyleyse (17.65) den

$$n > n_0 \Rightarrow |x - y| < b_n - a_n < \frac{1}{2}r$$

olmalıdır, ki bu (17.64) ile çelişir. Demek ki $x = y$ olmak zorundadır.

Teorem 17.12.1 (Heine-Borel Teoremi). *Salt topolojiye göre, gerçel eksenin sınırlı ve kapalı her aralığı tıkızdır.*

İSPAT: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere bir $F_1 = [a, b]$ kapalı aralığı ile bunun bir $\mathfrak{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ açık örtüsü verilsin. Açık aralıklar bir taban olduğundan (bkz. `Örnek` 4.1.6, açık örtüye ait her bir U_λ kümesi açık aralıkların bir bileşimi olarak yazılablir. Dolayısıyla, $\mathfrak{U}$ açık örtüsünden, açık aralıklardan oluşan bir

$$\mathscr{A} = \{(a_i, b_i) : i \in I\}$$

açık örtüsü elde edilir.

Önce $\mathscr{A}$ örtüsünden sonlu bir alt örtü seçilebileceğini gösterceğiz. $\mathscr{A}$ örtüsünden $[a, b]$ kapalı aralığını örten sonlu bir alt örtü seçilemiyorsa, aralığı tam ortasından eşit iki parçaya bölelim. Bu yarılardan enaz birisi $\mathscr{A}$ nın sonlu bir at örtüsüyle örtülemez; değilse, her iki yarı aralığın sonlu birer alt örtüsü olurdu. Bu da bütün aralığın sonlu bir alt örtüsü olması demektir. Şimdi $\mathscr{A}$ nın sonlu bir alt örtüsüyle örtülemeyen ilk yarı aralığı $F_2 = [a_2, b_2]$ ile gösterelim. Bu aralığı da tam ortasından iki eşit parçaya bölelim. Gene bu iki yarım aralıktan enaz birisi $\mathscr{A}$ nın sonlu bir alt örtüsüyle örtülemeyecektir. Örtülemeyen birini $F_3 = [a_3, b_3]$ ile gösterelim. Bu olguyu durmadan yinelersek, kapalı kümelerden oluşan azalan bir

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$$

kümeler dizisi elde edilir. $F_n = [a_n, b_n]$ kapalı aralığının uzunluğu $(b-a)/2^n$ dir. Dolayısıyla, bu kümeler dizisinin çapları sıfıra yakınsar; yani $\mathfrak{s}(F_n) \to 0$ dır. Öyleyse bu dizinin arakesitinin birtek öğesi vardır (bkz. `Önerme` 17.12.2). Bu öğeye p diyelim. Tabii $p \in [a, b]$ dir. $\mathscr{A}$ bu aralığın bir örtüsü olduğundan, $\mathscr{A}$ ya it bir (a_1, b_1) açık aralığı p yi içerir. $\epsilon = \min\{b_1 - p, p - a_1\}$ diyelim.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \mathfrak{s}(F_n) < \epsilon$$

olacak biçimde bir n_0 sayısı vardır. Buradan

$$n \geq n_0 \Rightarrow F_n \subset (a_1, b_1)$$

çıkar. Bu ise F_n aralığının, $\mathscr{A}$ nın bir öğesi ile, dolayısıyla, sonlu bir alt örtüsüyle örtülebiliyor olması demektir. Bu bir çelişkidir. Öyleyse $\mathscr{A}$ nın $[a, b]$ yi örten sonlu bir alt örtüsü olmadığı varsayımımız yanlıştır, yani

$$[a, b] \subset \bigcup \{(a_k, b_k) : 1 \leq k \leq m\}$$

olacak biçimde $\mathscr{A}$ nın sonlu bir $\{(a_k, b_k) : 1 \leq k \leq m\}$ alt örtüsü vardır. Öte yandan, her bir (a_k, b_k) aralığı $\mathfrak{U}$ örtüsüne ait enaz bir U_k kümesi tarafından kapsanacaktır. Öyleyse

$$[a, b] \subset \bigcup \{U_k : 1 \leq k \leq m\}$$

olur. Böylece $\mathfrak{U}$ açık örtüsünden sonlu bir $\{U_k : 1 \leq k \leq m\}$ alt örtüsü seçilmiş olur. Artık $[a, b]$ nin tıkız olduğu tanımdan çıkar (bkz. `Tanım` **??**).

Teorem 17.12.2. *Salt metriğe göre gerçel sayılar kümesi tam bir uzaydır.*

İSPAT: `Sonuç` 17.11.1 uyarınca, gerçel eksenin sınırlı ve kapalı her altkümesinin tıkız olduğunu göstermek yetecektir. Gerçel eksenin sınırlı ve kapalı kapalı bir kümesi K olsun. Sınırlı olduğu için K yı kapsayan bir $[a, b]$ aralığı vardır (bkz. `Sonuç` 17.5.1). *Heine-Borel Teoremi* uyarınca, $[a, b]$ tıkızdır ve tıkız bir kümenin kapalı alt kümeleri de tıkız olduğundan K kümesi tıkızdır.

Tamlık kavramı topolojik değil, metrik bir özelliktir. Bunu göstermek için, aynı metrel topolojiyi üreten farklı iki metrik uzaydan birisinin tam olmasına karşın ötekinin tam olmayabileceğine bir örnek vermek yetecektir:

Örnek 17.12.1. ν, `Örnek` 17.37 te tanımlanan metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, \nu)$ uzayı tam değildir.

(n) doğal sayılar dizisinin $(\mathbb{R}, \nu)$ içinde bir *Cauchy* dizisi olduğunu biliyoruz (bkz.Örnek 17.7). Eğer bu uzay tam olsaydı (n) dizisinin $\mathscr{T}_\nu$ metrel topolojisine göre bir limiti olacaktı. Oysa ν ile $\mathfrak{s}$ denk; yani $\mathscr{T}_\nu = \mathscr{T}_\mathfrak{s}$ idi (bkz. `Örnek` 17.3.1). Bu durumda (n) dizisinin salt topolojiye göre de aynı limite yakınsaması gerekecekti, ki bu da (n) dizisinin salt metriğe göre *Cauchy* olmasını gerektirecekti; çünkü metrel topolojide yakınsak her dizi o metriğe göre bir *Cauchy* dizisidir. Oysa (n) doğal sayılar dizisinin $(\mathbb{R}, \mathfrak{s})$ uzayında bir Cauchy dizisi olmadığını biliyoruz. Bu çelişki olmayacağına göre; varsayımımız yanlıştır; yani $(\mathbb{R}, \nu)$ tam değildir.

Öte yandan $(\mathbb{R}, \mathfrak{s})$ uzayının tam olduğunu biliyoruz (bkz. `Teorem` 17.12.2). Demek ki, ν ile $\mathfrak{s}$ aynı metrel topolojiyi ürettikleri halde gerçel sayılar kümesi birisine göre tamdır, ama ötekine göre değildir.

Örnek 17.12.2. Gerçel eksenin her hangi bir açık aralığı, salt topolojiye göre, $\mathbb{R}$ ye topolojik eşyapılıdır.

(bkz. `Önerme` 8.3.4). Ama $\mathbb{R}$ nin tam olmasına karşın, açık bir aralık tam değildir. Örneğin, $(0, 1)$ açık aralığındaki $(\frac{1}{n})$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Ancak bu dizinin $(0, 1)$ içinde bir limiti yoktur.

17.12.1 Problemler

1. Cantor Arakesişme Özeliği'nde (bkz. `Teorem` 17.8.1), (F_n) kümelerinin kapalılık koşulunun kaldırılamayacağını gösteriniz.

   Yol gösterme:
   $$A_n = (0, \frac{1}{n}], n = 1, 2, 3, \ldots$$
   kümeler dizisinin arakesitinin boş olduğunu görünüz.

2. İrrasyonel sayıların gerçel sayılar kümesi içinde yoğun olduğunu gösteriniz.

3. $\mathbb{R}^n (n > 1)$ Öklid uzayının tam olduğunu gösteriniz.

17.13 BÜZGÜ DÖNÜŞÜMLERİ

Tanım 17.13.1. (X, ρ) bir metrik uzay olsun ve $T : X \to X$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, y \in X$ için

$$\rho(T(x), T(y)) \leq r\rho(x, y)$$

olacak biçimde bir r $(0 \leq r < 1)$, gerçel sayısı varsa, T fonksiyonuna bir *büzgü dönüşümüdür (contraction)* denilir.

Örneğin, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayından kendi içine $f(x) = \frac{1}{2}x$ diye tanımlanan dönüşüm bir büzgü dönüşümüdür.

Önerme 17.13.1. *Her büzgü dönüşümü düzgün süreklidir.*

İSPAT: (X, ρ) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ fonksiyonu bir büzgü dönüşümü olsun. Her $p \in X$ noktasında f büzgü dönüşümünün düzgün sürekli olduğunu göstermek için, *6.4.Tanım* 'ın sağlandığını göstermeliyiz. Verilen her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, $\delta = \epsilon$ olan δ sayısını seçelim.

$$\rho(x, p) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(p)) \leq r\rho(x, p) \leq r\delta = r\epsilon < \epsilon$$

olduğunu düşünmek yetecektir.

Önerme 17.13.2. (X, ρ) *bir tam metrik uzay ve* $T : X \to X$ *fonksiyonu bir büzgü dönüşümü ise* X *uzayında* $T(p) = p$ *koşulunu sağlayan bir ve yalnızca bir* p *noktası vardır.*

İSPAT:

(X, ρ) tam bir uzay ve T bunun üzerinde bir büzgü dönüşümü olsun. Gösterimde basitliği sağlamak için $T(x) = Tx$ yazacağız. her hangi bir $x_0 \in X$ noktası seçelim. $T^n = T \circ T^{n-1}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
x_1 &= Tx_0 \\
x_2 &= Tx_1 = T^2x_0 \\
x_3 &= Tx_2 = T^3x_0 \\
&\vdots \\
x_n &= Tx_{n-1} = T^nx_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

biçiminde bir (x_n) dizisi kurabiliriz. Önce bu dizinin bir *Cauchy dizisi* olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
\rho(x_m, x_n) &\leq \rho(T_{x_0}^m, T_{x_0}^n) \\
&= \rho(T_{x_0}^m, T_0^m T_{x_0}^{n-m}) \\
&\leq r^m \rho(x_0, T_{x_0}^{n-m}) \\
&= r^m \rho(x_0, x_{n-m})) \\
&\leq r^m [\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{n-m-1}, x_{n-m})] \\
&\leq r^m \rho(x_0, x_1)[1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-m-1}] \\
&\leq \frac{r^m}{1-r}\rho(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $0 \leq r < 1$ olduğundan, m yeterince büyültülerek, sağ yan istenildiğince küçültülebilir. Demek ki (x_n) bir Cauchy dizisidir. Öte yandan, X tam olduğundan $x_n \to p$ olan bir $p \in X$ vardır. Şimdi $T_p = p$ olduğunu göstereceğiz. Önceki önerme uyarınca T sürekli olduğundan dizisel süreklidir (bkz. `Teorem` 11.2.1) Öyleyse, `Teorem` 17.6.1 den

$$T_p = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p$$

çıkar.

Son olarak, p nin tekliğini gösterelim. Eğer $T_p = p$ ve $T_q = q$ olacak biçimde iki sabit nokta varolsaydı

$$\rho(p, q) = \rho(T_p, T_q) \leq r\rho(p, q)$$

olacaktı. Oysa $r < 1$ olduğundan, bu eşitsizlik $\rho(p, q) = 0$ olmasını gerektirir, ki bu da $p = q$ olmasına denktir.

Tanım 17.13.2. Yukarıdaki koşulu sağlayan p noktasına T dönüşümünün *sabit noktası* denilir.