17.3 METREL TOPOLOJİ

Uygulamada karşımıza çıkan topolojik uzayların büyük bir bölümü aynı zamanda bir metrik uzaydır. Daha doğru bir deyişle, her metrik uzay bir ve yalnız bir topolojik uzay belirler. Buna söz konusu metriğin belirlediği *metrel topoloji* diyeceğiz. Bu kesimde bunun nasıl olduğunu göreceğiz. Ama hemen belirtelim ki, bu özeliğin karşıtı genel olarak doğru değildir; yani her topolojik uzay bir metrik uzay belirlemek zorunda değildir.

Tanım 17.3.1. (X, ρ) bir metrik uzay olsun ve bir $a \in X$ öğesi ile bir $r > 0$ sayısı verilsin.

$$B_\rho(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$$

alt-kümesine a merkezli ve r yarıçaplı *açık yuvar* diyeceğiz. ρ metriğinin başkasıyla karışması kuşkusu olmadığı zaman $B_\rho(a, r)$ yerine, gösterimde basitliği sağlamak için, $B(a, r)$ yazacağız.

Şimdi metrik uzaydan bir topolojik uzayın elde edilişini açıklayacağız.

Bunun için, bir metrik uzayda açık yuvarların bir topoloji tabanı olduğunu göstermek yetecektir. Bu topolojiye, söz konusu metriğin ürettiği metrel topoloji diyeceğiz.

Önerme 17.3.1. *Bir metrik uzayda iki açık yuvarın arakesiti boş değilse, bu arakesite ait her noktaya karşılık, bu noktayı merkez kabul eden ve arakesit tarafından kapsanan açık bir yuvar vardır.*

İSPAT: (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Göreceğiz ki eğer

$$c \in B(a, r_1) \cap B(b, r_2) \tag{17.44}$$

ise

$$B(c, r) \subset B(a, r_1) \cap B(b, r_2) \tag{17.45}$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı vardır. $c \in B(a, r_1)$ olduğundan $\rho(a, c) < r_1$ dir, ki buradan $r_1 - \rho(a, c) > 0$ yazabiliriz. Benzer olarak, $r_2 - \rho(b, c) > 0$ olacağı da apaçıktır. Şimdi

$$r = \inf\{r_1 - \rho(a, c), r_2 - \rho(b, c)\}$$

diyelim. Bu durumda aradığımız (17.45) bağıntısı sağlanacaktır. Gerçekten, $x \in B(c, r)$ ise,

$$\begin{aligned} \rho(x, a) &\leq \rho(x, c) + \rho(c, a) \\ &< r + \rho(c, a) \\ &\leq [r_1 - \rho(c, a)] + \rho(c, a) \\ &= r_1 \end{aligned}$$

olacaktır. Bu, $x \in B(a, r_1)$ olması demektir. Benzer yolla $x \in B(b, r_2)$ olduğu da gösterilebilir. Bu son iki içerme aradığımız kapsamayı verir.

Teorem 17.3.1. *Bir metrik uzayın bütün açık yuvarlarından oluşan aile bir topoloji tabanıdır.*

İSPAT: (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Bu metrik uzayın bütün açık yuvarlarından oluşan aileyi $\mathscr{B}$ ile gösterelim; yani

$$\mathscr{B} = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$$

olsun. Şimdi $\mathscr{B}$ ailesinin bir topoloji tabanı olduğunu göstereceğiz. Bu iş için, $\mathscr{B}$ ailesinin, topoloji tabanı için gerekli ve yeterli koşulları belirleyen `Önerme` 4.1.3 nin koşullarını sağladığını göstermek yetecektir.

Her $r > 0$ için $x \in B(x, r)$ olduğundan

$$X = \cup\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$$

olacağı apaçıktır. Demek ki, sözünü ettiğimiz önermenin birinci koşulu sağlanmaktadır. İkinci koşulun sağlandığını ise önceki önermeden biliyoruz.

Artık, bir metrik uzaydan bir topolojik uzayın nasıl elde edildiğini söyleyebiliriz: Bir metrik uzayın bütün açık yuvarlarından oluşan $\mathscr{B}$ ailesinin ürettiği $\mathscr{B}^*$ ailesi, yani açık yuvarların her hangi bir bileşimine eşit olan bütün kümelerden oluşan aile, X kümesi üzerinde bir topolojik yapıdır. Ayrıca, bu topolojinin birtek olduğu üretilen aile tanımından bellidir.

Bu söylediklerimizi derleyerek şu teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 17.3.2. *Her metrik bir ve yalnız bir tane metrel topoloji belirler.*

Tanım 17.3.2. Bir (X, ρ) metrik uzayı verildiğinde ρ metriğinin X kümesi üzerinde belirlediği topolojiye metrel topoloji diyecek ve $\mathscr{T}_\rho$ ile göstereceğiz. X kümesi üzerindeki farklı iki metrik aynı bir topolojiyi belirliyorsa, bu iki metrik birbirine denktir; yani bir X kümesi üzerinde tanımlı ρ ve μ metrikleri için $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}_\mu$ oluyorsa ρ ile μ birbirine *denk iki metriktir* denilir.

$\mathscr{T}_\rho$ topolojisine göre açık kümelere (X, ρ) metrik uzayının açık kümeleri diyeceğiz. $B_\rho(x, r)$ yuvarlarından oluşan $\mathscr{B}$ ailesi $\mathscr{T}_d$ topolojisinin bir tabanı idi. Dolayısıyla, bu yuvarların herbirisi açık bir kümedir. Bu kümelere açık yuvarlar denmesinin nedeni budur.

Bir topolojik uzaydaki açık kümeler, topoloji tabanına ait kümelerin bir bileşimine eşit olduğuna göre, bir metrik uzaydaki her açık küme, açık yuvarların bir bileşimine eşit olacaktır.

Önerme 17.3.2. *Gerçel sayılar üzerinde tanımlanan salt metriğin belirlediği metrel topoloji salt topolojidir.*

İSPAT: Her $a, b \in \mathbb{R}$ için, $c = (a+b)/2$ ve $r = (b-a)/2$ olmak üzere

$$B(c, r) = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

dir. Demek ki gerçel eksenin her açık aralığı, salt metriğe göre açık bir yuvar ve salt topolojiye göre de açık bir kümedir.

Önerme 17.3.3. $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ *vektör uzayı üzerinde tanımlanan* $\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, \mathfrak{s}_n$ *metrikleri birbirlerine denktirler.*

İSPAT: $\mathscr{T}_\mathfrak{p} = \mathscr{T}_\mathfrak{m} = \mathscr{T}_{\mathfrak{s}_n}$ olduğunu göstermek için, birisinin tabanına ait olan bir kümenin ötekinin tabanına ait bir kümeyi kapsadığını göstermek yetecektir (bkz. Önerme 4.1.2). (17.28), (17.29) ve (17.30) tanımlamaları kullanılırsa, istenenler aşağıdaki kapsamalardan çıkar:

$$B_{\mathfrak{s}_n}(x, r) \supset B_\mathfrak{p}\left(x, \frac{r}{2}\right) \supset B_{\mathfrak{s}_n}\left(x, \frac{r}{4}\right)$$

ve

$$B_{\mathfrak{s}_n}(x, r) \supset B_\mathfrak{m}\left(x, \frac{r}{2}\right) \supset B_{\mathfrak{s}_n}\left(x, \frac{r}{4}\right)$$

$\mathbb{R}^2$ vektör uzayında, bunların geometrik şekilleri çizilirse, kapsamalar kolayca görülebilir.

Örnek 17.3.1. Gerçel sayılar kümesi üzerinde

$$\nu(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$$

diye tanımlı ν metriği ile $\mathfrak{s}(x, y) = |x - y|$ diye tanımlı $\mathfrak{s}$ salt metriği birbirlerine denktirler.

İSPAT: ν nün $\mathbb{R}$ üzerinde bir metrik olduğunu biliyoruz. O halde $\mathscr{T}_{\mathfrak{s}} = \mathscr{T}_{\nu}$ olduğunu göstermek yetecektir. $f(x) = x/(1+|x|)$ dönüşümünün, salt topolojiye göre, $\mathbb{R}$ den $(-1,+1)$ aralığı üzerine bir eşyapı dönüşümü olduğunu göstermiştik. Şimdi bir $a \in \mathbb{R}$ noktası ile bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan

$$f[B_{\mathfrak{s}}(a,\delta)] \subset B_{\mathfrak{s}}(f(a),\epsilon)$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$\begin{aligned} |a-x| < \delta &\Rightarrow |f(a) - f(x)| < \epsilon \\ &\Rightarrow \left| \frac{a}{1+|a|} - \frac{x}{1+|x|} \right| \\ &\Rightarrow \nu(a,x) < \epsilon \end{aligned}$$

çıkar, yani her $B_{\nu}(a,\epsilon)$ açık yuvarına karşılık

$$B_s(a,\delta) \subset B_{\nu}(a,\epsilon) \tag{17.46}$$

olacak biçimde bir $B_s(a,\delta)$ açık yuvarı vardır.

Tersine olarak f^{-1} ters fonksiyonu da sürekli olduğundan, bir $B_s(a,r)$ açık yuvarı verildiğinde

$$f^{-1}[F_s(f(a),q)] \subset B_s(a,r)$$

olacak biçimde bir $B_s(f(a),q)$ açık yuvarı vardır. O halde

$$|f(x) - f(a)| < q \Rightarrow |x-a| < r$$

$$\left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{a}{1+|a|} \right| < |x-a| < r$$

olur. Bu ise

$$\nu(a,x) < q \Rightarrow s(a,x) < r$$

olması demektir, ki buradan

$$B_{\nu}(a,q) \subset B_s(a,r) \tag{17.47}$$

çıkar. (17.46) ve (17.47) bağıntıları bize, a noktasının $\mathscr{T}_{\mathfrak{s}}$ topolojisine göre komşuluk ailesinin $\mathscr{T}_{\nu}$ topolojisine göre komşuluklar ailesine eşit olduğunu söyler. Her $a \in \mathbb{R}$ için bu özelik var olduğundan $\mathscr{T}_{\mathfrak{s}} = \mathscr{T}_{\nu}$ olduğu, yani $\mathfrak{s}$ metriği ile ν metriğinin denk olduğu ortaya çıkar.

Önerme 17.3.4. *(X, ρ) bir metrik uzay olsun ve bir $a \in X$ öğesi ile bir $r > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda*

$$D(a, r) = \{x : d(a, r) \leq r\}$$

kümesi kapalıdır.

İSPAT: Bunun için $D(a, r)$ kümesinin tümleyeni olan $D' = \{x : \rho(a, x) > r\}$ kümesinin açık olduğunu gösterelim. $y \in D'$ ise $\rho(a, y) > r$ olacağından $2\epsilon = \rho(a, y) - r$ dersek $\epsilon > 0$ olacaktır. Bu durumda $B_\rho(y, \epsilon) \subset D'$ olduğundan, y öğesi D' kümesinin bir iç noktası olacaktır. Her $y \in D'$ için aynı iş yapılabileceğine göre D' kümesi açıktır; dolayısıyla $D(a, r)$ kümesi kapalıdır.

Bu özellikten dolayı $D(a, r)$ kümesine a merkezli, r yarıçaplı *kapalı yuvar (disk)* diyeceğiz.

Örnek 17.3.2. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt değer metriğini düşünelim. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $c = (a + b)/2$ ve $r = (b - a)/2$ olmak üzere

$$D(c, r) = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

olur. Gerçel eksen üzerindeki bu kümelere, kapalı aralık denmesinin nedeni budur.

Şimdi de metrel topolojilerde komşuluklar sistemiyle açık yuvarlar arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Her $r > 0$ için $x \in B(x, r)$ olduğu düşünülürse, $B(x, r)$ kümesinin $\mathscr{T}_\rho$ topolojisine göre, x noktasının açık bir komşuluğu olduğu görülür. Bu nedenle, $B(x, r), r > 0$, yuvarına x noktasının r yarıçaplı *açık yuvarsal komşuluğu* diyeceğiz.

Önerme 17.3.5. *Her $x \in B(a, r)$ için $B(x, \epsilon) \subset B(a, r)$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır.*

İSPAT: Bu iş için $\epsilon < r - \rho(a, x)$ almak yetecektir. Gerçekten $z \in B(x, \epsilon)$ ise, $\rho(x, z) < \epsilon$ olduğundan,

$$d(a, z) \leq \rho(a, x) + \rho(x, z) < \rho(a, x) + r - \rho(a, x) = r$$

çıkar ki bu $z \in B(a, r)$ olması demektir. Bu, aradığımız şeyi verir.

Önerme 17.3.6. *$T \in \mathscr{T}_\rho$ ise, her $x \in T$ için $B(x, \epsilon) \subset T$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır.*

İSPAT: Açık yuvarlardan oluşan $\mathscr{B}$ ailesi $\mathscr{T}_\rho$ metrel topolojisi için bir taban olduğuna göre, verilen $x \in T$ öğesini içeren ve verilen T kümesi tarafından kapsanan bir $B(a,r)$ yuvarı vardır.

Artık bu yuvara, önceki önermeyi uygularsak, $B(x,\epsilon) \subset B(a,r) \subset T$ olacak şekilde bir $B(x,\epsilon)$ açık yuvarının varlığı söylenebilir.

Teorem 17.3.3. *Bir metrik uzaydaki bir öğenin yuvarsal komşuluklarından oluşan aile, o öğenin bir yerel tabanıdır.*

İSPAT: (X,ρ) metrik uzayındaki bir x öğesinin $\mathscr{T}_d$ topolojisine göre komşulukları ailesine $\mathscr{B}(x)$ diyelim. $V \in \mathscr{B}(x)$ ise, komşuluk tanımı uyarınca, $x \in T \subset V$ olacak şekilde bir $T \in \mathscr{T}_\rho$ varolacaktır. Buna yukarıdaki önermeyi uygularsak, $x \in B(x,\epsilon) \subset T \subset V$ özeliğini sağlayan bir $B(x,\epsilon)$ açık yuvarının varlığı ortaya çıkar. Bu özelik, teoremin ispatını verir.

Sonuç 17.3.1. *(X,ρ) bir metrik uzay olsun ve bir $A \subset X$ alt-kümesi verilsin. A kümesinin $\mathscr{T}_\rho$ metrel topolojisine göre açık olması için gerekli ve yeterli koşul, her $a \in A$ öğesinin A kümesi tarafından kapsanan açık yuvarsal bir komşuluğunun varolmasıdır.*

İSPAT:

Gerekliği: `Önerme` 17.3.6 den çıkar.

Yeterliği: Eğer her $a \in A$ için $B(a,\epsilon(a)) \subset A$ olacak şekilde bir $B(a,\epsilon(a))$ açık yuvarı varsa

$$A = \cup_{a \in A} B(a,\epsilon(a))$$

olur ve de açık kümelerin bir bileşimine eşit olduğundan $A \in \mathscr{T}_\rho$ çıkar.

Sonuç 17.3.2. *Metrel topolojiler Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlar.*

İSPAT: $(X, \mathscr{T}_\rho$ uzayında her hangi bir x öğesinin sayılabilir bir komşuluklar tabanı olduğunu göstermek yetecektir. Her $r > 0$ sayısına karşılık $(1/n) < r$ olacak biçimde bir n doğal sayısı bulunabilir. Dolayısıyla

$$B(x,1/n) \subset B(x,r)$$

olacaktır. Buradan

$$\{B(x,1/n) : n \in \mathbb{N}\}$$

ailesinin x noktasının bir yerel tabanı olduğu çıkar.

Örnek 17.3.3. Gerçel sayılar üzerindeki salt topoloji bir metrel topoloji olduğundan Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlar. Daha genel olarak $\mathbb{R}^n \quad (n \geq 1)$ üzerindeki salt topoloji Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlar.

Önerme 17.3.7. *Ayrılabilir metrel uzaylar İkinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlarlar.*

İSPAT: $(X, \mathscr{T}_\rho)$ metrel uzayı ayrılabilir ise X kümesinin sayılabilir yoğun bir alt kümesi vardır. Bu kümeye S diyelim. Sonra merkezleri S ye ait bir öğe ve yarıçapları bir rasyonel sayıya eşit olan yuvarların oluşturduğu aileye $\mathscr{B}$ diyelim; yani

$$\mathscr{B} = \{S(a, q) : a \in S, q \in Q\}$$

olsun. Bu ailenin sayılabilir olduğu apaçıktır. Dolayısıyla, bu ailenin $\mathscr{T}_\rho$ topolojisi için bir taban olduğunu gösterebilirsek, ispat bitecektir. Bunun için her hangi bir $\mathscr{T}_\rho$ açık kümesinin $\mathscr{B}^*$ ailesine ait olduğunu göstermek yetecektir. Taban tanımı uyarınca her $x \in T$ için $x \in B(a, q) \subset T$ olacak biçimde bir $B(a, q) \in \mathscr{B}$ açık yuvarının varlığını göstermeliyiz.

Önerme 17.3.6 uyarınca $B(x, r) \subset T$ olacak biçimde bir $B(x, r)$ açık yuvarı vardır. Gerekirse biraz daha küçülterek, bu yuvarın r yarıçapının rasyonel bir sayı olduğunu varsayalım. B kümesi yoğun olduğundan, S ye ait bir $a \in B(x, r/3)$ öğesi seçilebilir. Şimdi rasyonel bir q sayısını $r/3 < q < 2r/3$ olacak biçimde seçersek,

$$x \in B(a, q) \subset B(x, r) \subset T$$

olur ve ispat biter.

Uyarı 17.3.1. Bazı metrik uzaylarda $D(a, r)$ kapalı yuvarı $B(a, r)$ açık yuvarını kapsayan en küçük kapalı kümedir. Başka bir deyişle, $B(a, r)$ kümesinin kaplamı, bazı uzaylarda, $D(a, r)$ kümesine eşittir. Ancak, bu özelik genel olarak doğru değildir.

17.3.1 PROBLEMLER

1. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Her $(x, y) \in X \times X$ için $\delta(x, y) = \inf\{1, \rho(x, y)\}$ diyelim. Bu durumda ρ ile δ metriklerinin denk olduğunu; yani $\mathscr{T}_\rho = \mathscr{T}_\delta$ olduğunu gösteriniz.

2. ρ ile δ bir X kümesi üzerinde tanımlı iki metrik olsun. Eğer her $(x, y) \in X \times X$ için

$$a\delta(x, y) \leq \rho(x, y) \leq b\delta(x, y)$$

eşitsizlikleri sağlanacak biçimde pozitif a ve b sayıları varsa, ρ ile δ nın denk olduğunu gösteriniz.

3. `Örnek` 17.2.1 teki δ metriğini X yerine $\mathbb{R}^2$ koyarak düşününüz. Başlangıç merkezli açık ve kapalı birim yuvarları bulunuz. Açık birim yuvarın kaplamı kapalı birim yuvara eşit midir? Birim yuvarın kenar kümesi nedir?

4. (a, b) açık aralığının kaplamının [a,b] kapalı aralığı olduğunu gösteriniz. Daha genel olarak, $\mathbb{R}^n$ ya da $\mathbb{C}^n$ uzaylarında, Öklid metriğine göre $B(a, r)$ açık yuvarlarının kaplamlarının $D(a, r)$ kapalı yuvarları olduğunu gösteriniz.

5. `Örnek` 17.2.1 teki δ metriğinin X kümesi üzerinde tanımladığı metrik topolojisinin ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.

6. Önceki bölümde tanımlanan $\delta, \mathfrak{p}, \mathfrak{m}$ ve $\mathfrak{s}_n$ metriklerini $\mathbb{R}^2$ üzerinde düşününüz. Merkezleri düzlemde $0 = (0, 0)$ noktası ve yarıçapları $r = 1$ olan açık yuvarları, herbirisi içinayrı ayrı çiziniz.

17.4 EŞMETREL UZAYLAR

Tanım 17.4.1. (X, ρ) ile (Y, μ) metrikimsi iki uzay olsun ve bir $f : X \to Y$ bire-bir-içine fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu uzaklıkları koruyorsa, yani her $x, y \in X$ için

$$\rho(x, y) = \mu(f(x), f(y))$$

eşitliği sağlanıyorsa, f ye *eşmetrel (isometric)* bir dönüşümdür ve f dönüşümü (X, ρ) uzayını (Y, μ) uzayı içine gömüyor denir. Böyle bir dönüşüm varsa (X, ρ) uzayı (Y, μ) içine gömülebilir ve (X, ρ) uzayı ile $(f(X), \mu)$ alt-uzayı eşmetrel eşyapılıdır denir. Bu durumda X uzayının f altındaki resmi olan $f(X)$ alt-uzayına da gömü diyeceğiz. Eğer f dönüşümü bire-bir-örten ise (X, ρ) ile (Y, μ) uzayları *eşmetrel eşyapılı* iki metrik uzay olur.

Örnek 17.4.1. ℓ_2 diziler uzayı ile L^2 fonksiyonlar uzayı *eşmetrel eşyapılıdır.*

Gerçekten klasik Fourier Analizinden bilindiği gibi L^2 uzayına ait her f fonksiyonunun $c = (c_n)$ Fourier katsayıları dizisi ℓ_2 dizi uzayına aittir. Tersine olarak, ℓ_2 uzayına ait her $c = (c_n)$ dizisi L^2 uzayındaki bir f fonksiyonunun

Fourier katsayıları olur. Böylece, $f \to c$ dönüşümü L^2 den ℓ_2 uzayına birebir-örten bir dönüşüm olur. Ayrıca bu biçimde eşlendiklerinde

$$\left(\int |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\| = \|c\| = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Parseval eşitliği sağlanmaktadır [23], [26]. Buradan bu iki uzayın eşmetrel eşyapılı olduğu çıkar.

Önerme 17.4.1. *Eşmetrel dönüşüm uzaklıkları korur. Oysa denk metrikler uzaklıkları korumayabilirler. Dolayısıyla, denk iki metriğin eşmetrel olması gerekmez.*

Bunun ispatını aşağıdaki örneklerle açıklayacağız.

Örnek 17.4.2. $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ Öklit uzayından kendisine tanımlanan

$$f : x \to x + c, \quad (c \in \mathbb{R}^n, \ \ \text{sabit}) \tag{17.48}$$

öteleme dönüşümü, Öklit metriğine göre eşmetrel bir dönüşümdür.

Gerçekten, (17.30) uyarınca

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_n(f(x), f(y)) &= \|f(x) - f(y)\| \\ &= \|(x + c) - (y + c)\| \\ &= \|x - y\| \\ &= \mathfrak{s}_n(x, y) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla f dönüşümü $\mathbb{R}^n$ içinde Öklit uzaklıklarını korumaktadır.

Örnek 17.4.3. $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ Öklit uzayından kendisine tanımlanan

$$f : x \to ax, \quad (a \in \mathbb{R}, \ \ \text{sabit}) \tag{17.49}$$

boylama dönüşümü, $a \neq 1$ ise, Öklit metriğine göre eşmetrel bir dönüşüm değildir.

İSPAT:

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_n(f(x), f(y)) &= \|ax - ay\| \\ &= |a| \ \|x - y\| \\ &= a\mathfrak{s}_n(x, y) \end{aligned}$$

olur. $a \neq 1$ olduğunda f nin uzaklıkları korumadığı ortaya çıkar. Öte yandan, *boylama dönüşümünün* bir topolojik eşyapı resmi olduğunu biliyoruz. Demek ki bir *topolojik eşyapı dönüşümü* bir eşmetrel eşyapı dönüşümü olmak zorunda değildir. Ama bunun tersi her zaman doğrudur; yani her eşmetrel eşyapı dönüşümü bir topolojik eşyapı dönüşümüdür.

17.4.1 Problemler

1. $\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, \mathfrak{s}_n$ metrikleri sırasıyla (17.28), (17.29) ve (17.30) bağıntıları ile tanımlı metrikler olmak üzere $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{p}), (\mathbb{R}^n, \mathfrak{m}), (\mathbb{R}^n, \mathfrak{s}_n)$ uzayları eşmetrik değildirler, ama metrikler denktir. Gösteriniz.

2. Boş olmayan bir X kümesi üzerinde

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} 2, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

metrikleri verilsin. $x \neq y$ için $\delta(x,y) = 1$ ve $\sigma(x,y) = 2$ olduğundan (X, δ) uzayı ile (X, σ) uzayı eşmetrik eşyapılı değildirler. Ama topolojik eşyapılıdırlar. Çünkü δ ve σ metriklerinin her ikisi de X üzerine *ayrık topolojiyi* koyar.

17.5 SINIRLILIK

Tanım 17.5.1. (X, ρ) bir metrik uzay ve A bu uzayın boş olmayan bir altkümesi olsun.

$$\rho(A) = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\} \tag{17.50}$$

sayısına A kümesinin *çapı* denilir. Çapı sonlu olan kümelere *sınırlı kümeler*, çapı sonsuz olan kümelere de *sınırsız kümeler* denilir.

Bir kümenin çapının sıfır olması için tek öğeli bir küme olması yeterlidir.
Öklid metriğine göre gerçel eksenin her sonlu aralığı sınırlı bir kümedir. $\mathbb{R}^2$ düzlemindeki her doğru sınırsız bir kümedir.

Tanım 17.5.2. A ile B kümeleri (X,ρ) metrik uzayının boş olmayan iki alt kümesi olsun. A ile B kümeleri arasındaki *uzaklık*

$$\rho(A,B) = \inf\{\rho(x,y) : x \in A, y \in B\} \tag{17.51}$$

sayısıdır. Özel olarak, bir w öğesinin bir A kümesine uzaklığı

$$\rho(w,A) = \inf\{\rho(w,x) : x \in A\} \tag{17.52}$$

sayısıdır. Buradan, iki küme arasındaki uzaklığın

$$\rho(A,B) = \inf\{\rho(a,B) : a \in A\} \tag{17.53}$$

olduğu yazılabilir.

$a \in A$ ise $\rho(a,A) = 0$ olacağı apaçıktır. Ama $\rho(a,A) = 0$ olması $a \in A$ olmasını gerektirmez. Örneğin, gerçel sayılar üzerindeki salt değer metriğine göre 0 ve 1 noktalarının $A = (0,1)$ kümesine olan uzaklıkları sıfıra eşittir, ama her ikisi de A kümesine ait değildir.

Bir noktanın bir kümeye uzaklığının sıfır olması aşağıdaki önermeyle belirginleşir.

Önerme 17.5.1. *$\rho(a,A) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $a \in \bar{A}$ olmasıdır.*

İSPAT: $\rho(a,A) = 0$ olması her $r > 0$ için $B(a,r)$ açık yuvarının A ile kesişmesine, ki bu da $a \in \bar{A}$ olmasına denktir.

$A \cap B \neq \emptyset$ ise $\rho(A,B) = 0$ olacağı açıktır. Ama bunun karşıtı doğru değildir. Yani iki küme arasındaki uzaklık sıfır ise bu kümeler kesişmek zorunda değildir. Örneğin, gerçel eksen üzerindeki salt değer metriğine göre $A = (0,1)$ kümesi ile $B = [1,2]$ kümesi arasındaki uzaklık sıfıra eşittir; ama A ile B kümeleri kesişmez.

Önerme 17.5.2. *Sınırlı iki kümenin bileşimi de sınırlıdır.*

İSPAT: $x, y \in A \cup B$ olsun. Eğer $x, y \in A$ ise $\rho(x,y) \leq \rho(A)$; eğer $x, y \in B$ ise $\rho(x,y) \leq \rho(B)$ olacaktır. Eğer $x \in A$ ve $y \in B$ ise, sabit $a \in A$ ve $b \in B$ öğelerini rasgele seçelim. Üçgen eşitsizliğinden

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,a) + \rho(a,b) + \rho(b,y)$$

yazabiliriz, ki buradan

$$\rho(A \cup B) \leq \rho(a, b) + \rho(A) + \rho(B)$$

çıkar. Bu eşitsizlik her $a \in A$ ve her $b \in B$ için geçerli olduğundan

$$\rho(A \cup B) \leq \rho(A, B) + \rho(A) + \rho(B)$$

olur.

Sonuç 17.5.1. *Sınırlı bir küme, merkezi rasgele seçilen bir yuvar tarafından kapsanır.*

İSPAT: A sınırlı bir küme olsun ve keyfi seçilen bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. Bu noktayı B kümesi yerine koyarsak, önceki önermeden, her $x \in A$ için

$$\rho(x_0, x) \leq \rho(x_0, A) + \rho(A)$$

çıkar. Buradan x_0 merkezli ve $r = \rho(x_0, A) + \rho(A)$ yarıçaplı çemberin A kümesini kapsadığı görülür.

Tanım 17.5.3. Eğer bir $a \in A$ ile bir $b \in B$ için $\rho(a, b) = \rho(A, B)$ oluyorsa, a ile b öğelerine A ile B kümelerinin birbirlerine *en yakın* iki noktası denilir.

İki kümenin birbirlerine en yakın noktaları olmayabilir.

Örnek 17.5.1. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt metriğe göre $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ alt kümesi ile $B = \{0\}$ kümesinin birbirlerine en yakın noktaları yoktur. Çünkü iki küme arasındaki uzaklık $\rho(A, \{0\}) = 0$ olduğu halde, her n için $\rho(\frac{1}{n}, 0) > 0$ dır.

Tanım 17.5.4. (X, ρ) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın bir örtüsüne ait kümelerin herbirisinin çapı bir ϵ sayısından küçük kalıyorsa, bu örtüye A nın bir *ϵ-örtüsüdür* denilir.

Eğer her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık sonlu bir ϵ-örtüsü varsa, A kümesine *tümüyle sınırlıdır* diyeceğiz. Tümüyle sınırlı olan kümelerin sınırlı olduğu kolayca görülebilir. Gerçekten A tümüyle sınırlı bir küme ise, her hangi bir $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, A nın

$$\{A_i : i = 1, 2, ..., n\}$$

gibi sonlu bir ϵ-örtüsü olacaktır. Her i için A_i kümesinden bir a_i öğesi seçelim.

$$\alpha = \max\{\rho(a_i, a_k) : i, k = 1, 2, \ldots, n)\}$$

olsun. Her $x, y \in A$ için, i ile k rasgele seçilmek üzere,

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,a_i) + \rho(a_i,a_k) + \rho(a_k,y) \leq \alpha + 2\epsilon$$

olur. Buradan $\rho(A)$ çapının sınırlı olduğu çıkar.

Bu özelliğin karşıtı doğru değildir; yani sınırlı bir küme tümüyle sınırlı olmayabilir. Örneğin l^2-uzayında, yalnızca i -inci terimi 1 ve öteki terimleri sıfır olan

$$e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

dizilerinden oluşan $E = \{e_i : i = 1, 2, \ldots\}$ kümesi sınırlıdır. Çünkü her hangi iki öğesi arasındaki uzaklık $\sqrt{2}$ dir. Ama bu küme tümüyle sınırlı değildir. Zira ϵ sayısı olarak $\sqrt{2}$ den küçük birsayı seçildiğinde, E kümesinin bir ϵ-örtüsü yoktur.

17.5.1 Problemler

1. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki Öklit metriğine göre $xy = 1$ hiperbolü ile $y = 0$ doğrusu kesişmeyen kapalı iki alt kümedir. Her iki küme sınırsızdır ve aralarındaki uzaklık sıfıra eşittir. Gösteriniz.

2. Salt metriğe göre $\mathbb{R}$ uzayında $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ile $\left\{(n + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$ dizisinin öğelerinden oluşan A kümesi veriliyor. Bu kümeler kapalı mıdır? Bu kümeler kesişir mi? Bu kümeler sınırlı mıdır? Bu kümeler arasındaki uzaklık nedir?

3. Bir metrik uzaydaki sonlu her kümenin sınırlı olduğunu gösteriniz.

4. Bir metrik uzayın her A alt kümesi için $\rho(A) = \rho(\bar{A})$ olduğunu gösteriniz.