Bölüm 17

METRİK UZAYLAR

Klasik Analiz, ilkel işlemler diye adlandırdığımız *dört işlem* (toplama, çıkarma, çarpma, bölme) ile bunlara eklenen ve çoğu kez beşinci işlem diye adlandırılan *"limit"* işlemlerine dayalı olarak kurulmuş ve o kadar çok dallara ayrılmıştır ki, ayrı dalların uzmanları birbirlerini anlayamaz duruma gelmişlerdir. *Seriler, Analitik Fonksiyonlar, Diferensiyel Denklemler, Fourier Analizi,...,v.b.* gibi her biri bir ömür boyunca çalışılabilecek olan bu dalların başlıca ilkelerini ortak bir biçimde ortaya koymanın gerekliliği geçen yüzyılın matematikçileri tarafından duyulmaya başlandı. *Riemann, Weiserstrass, Cantor, Lebesgue, Hilbert, Riesz,...,v.b.* gibi matematiğin büyük isimleri bu yöndeki dev adımı atabildiler ve Klasik Analizin temel ilkelerini *Topoloji, Soyut Cebir, Ölçüm ve İntegral Kuramı* üzerine dayıyarak, bugün Çağdaş Analiz ediğimiz mükemmel kuramı kurabildiler. *Çağdaş Analiz*, gerçel ve karmaşık sayıları model alan soyut matematiksel yapılar üzerinde, klasik Analizin temel teoremlerini kurmaktadır.

Klasik Analizden Çağdaş Analize geçişte Metrik Uzaylar önemli bir yer tutar. Topolojinin başlıca kavramlarının pek çoğu metrik uzaylardan aktarılmıştr. Üstelik metrik uzaylar hala önemini korumaktadır. Bu nedenle, bu bölümde *metrik uzayların* temel özeliklerini inceleyeceğiz.

Metrik uzay kavramını vermeden önce, gerçel ya da karmaşık bir vektör uzayı üzerinde tanımlanan *norm* kavramını vereceğiz.

17.1 NORMLU UZAYLAR

Tanım 17.1.1. $\mathbb{K}$, gerçel ya da karmaşık sayılar cismini göstersin ve X kümesi $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özelliklere sahip bir

$$p : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna, X vektör uzayı üzerinde bir yarı-norm denilir:

Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için

[N1] $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (alt-toplamsallık)

[N2] $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ (pozitif-homojenlik)

Eğer bu ikisine ek olarak

[N3] $x \neq 0 \Rightarrow p(x) \neq 0$

özelliği de sağlanıyorsa, p fonksiyonuna X vektör uzayı üzerinde bir *normdur*, denilir.

Önerme 17.1.1. *Eğer p fonksiyonu X vektör uzayı üzerinde bir yarı-norm ise aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(a) $p(0) = 0$

(b) $|\ p(x) - p(y)\ | \leq p(x - y)$

(c) $p(x) \geq 0$

(d) $\{x : p(x) = 0\}$ kümesi X uzayının bir alt vektör uzayıdır

(e) $B = \{x : p(x) < 1\}$ kümesi dışbükeydir.

İSPAT:

(a): $[N2]$ de $\alpha = 0$ almak yeter.

(b): $[N1]$ den $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$ yazabiliriz. Bu ise,

$$p(x) - p(y) \leq p(x - y)$$

demektir. Aynı işi, x ile y nin yerlerini değiştirerek yaparsak

$$p(y) - p(x) \leq p(y - x)$$

çıkar. $[N2]$ uyarınca $p(x - y) = p(y - x)$ olduğundan, yukarıdaki iki eşitsizlikten

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$$

yazılabilir.

(c): $y = 0$ alınırsa (b) den çıkar.

(d): $p(x) = p(y) = 0$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ise, (c) den

$$0 \leq p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) = 0$$

olur, ki bu $\{x : p(x) = 0\}$ kümesinin bir alt-vektör uzayı olması demektir.

(e): $x, y \in B$ ve $0 < \alpha < 1$ ise

$$p(\alpha x + (1 - \alpha) y) \leq \alpha p(x) + (1 - \alpha) p(y) < 1$$

çıkar. Dolayısıyla, B kümesi dışbükey olur.

Tanım 17.1.2. Üzerinde bir norm tanımlanmış her hangi bir vektör uzayına *normlanmış* bir uzay, denilir.

Bir vektör uzayı üzerindeki bir normu, çoğu kez, $\| \ \|$ simgesiyle göstereceğiz. Buna göre norm fonksiyonu

$$x \to \|x\|$$

olacaktır. Bu norm ile normlanmış bir X vektör uzayını $(X, \|\|)$ simgesiyle belirteceğiz.

Aşağıdaki örnekler, n-boyulu $(n \geq 1)$ gerçel $\mathbb{R}^n$ ya da karmaşık $\mathbb{C}^n$ Öklit uzayında tanımlanan bazı normlardır.

Örnek 17.1.1. Her $x \in \mathbb{R}$ sayısının salt değerini $|x|$ ile gösterelim. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır, ve

$$x \to |x| \tag{17.1}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ vektör uzayı üzerinde bir normdur.

Örnek 17.1.2. Her $z \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısının salt değerini $|z|$ ile gösterelim. $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır ve

$$z \to |z| \tag{17.2}$$

fonksiyonu $\mathbb{C}$ vektör uzayı üzerinde bir normdur.

Örnek 17.1.3. Her $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$x \to \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{17.3}$$

diye tanımlanan dönüşüm $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir normdur. Gerçekten bu dönüşümün [Nl] , [N2] ve [N3] aksiyomlarını sağladığı kolayca görülür.

Örnek 17.1.4. Her $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ için

$$z \to \|z\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z_i| \tag{17.4}$$

diye tanımlanan dönüşüm $\mathbb{C}^n$ üzerinde bir normdur. Bunun ispatı da yukarıdakine benzer.

Örnek 17.1.5. Her $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$x \to \|x\|_{max} = \max\big\{|x_i| \ : \ (1 \le i \le n)\big\} \tag{17.5}$$

diye tanımlanan dönüşüm $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir normdur. (Neden?).

Örnek 17.1.6. Her $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ için

$$z \to \|z\|_{max} = \max\big\{|z_i| \ : \ (1 \le i \le n)\big\} \tag{17.6}$$

diye tanımlanan dönüşüm $\mathbb{C}^n$ üzerinde bir normdur. (Neden?).

n-boyutlu $(n \ge 1)$ gerçel $\mathbb{R}^n$ ve karmaşık $\mathbb{C}^n$ Öklit uzayları üzerinde tanımlanan önemli normlardan birisi şudur:

Tanım 17.1.3. $\mathbb{R}^n$ ya da $\mathbb{C}^n$ $(n \ge 1)$ uzayına ait bir $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ vektörünün *Öklit uzunluğu* aşağıdaki bağıntı ile tanımlanır:

$$u \to \|u\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17.7}$$

Buna *Öklid normu* denir. Gerçekten $u \to \|u\|_2$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ vektör uzayları üzerinde birer norm olduğunu ispatlamak için, öncelikle, aşağıdaki iki önemli eşitsizliği ortaya koyacağız.

Önerme 17.1.2 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)**.** *$\mathbb{R}^n$ yada $\mathbb{C}^n$ Öklit uzayına ait her $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve her $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vektörü için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \tag{17.8}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17.9}$$

İspat:

$a = \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|$ diyelim ve λ değişkenine göre ikinci dereceden olan

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \|x\|_2^2 \lambda^2 + 2a\lambda + \|y\|_2^2 \\ &= \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda |x_i| + |y_i|)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

polinomunu düşünelim. Her λ için $Q(\lambda)$ polinomun daima pozitif değerler alabilmesi için

$$\Delta = (2a)^2 - 4 \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2$$

diskriminantı pozitif olmamalıdır. Bu ise

$$a^2 \leq \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2$$

eşitsizliğini verir, ki bu sonuncusu aradığımız eşitsizliğe denktir.

Önerme 17.1.3 (Minkowski Eşitsizliği)**.** $\mathbb{R}^n$ *ya da* $\mathbb{C}^n(n \geq 1)$ *Öklit uzayına ait her* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *ve her* $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *vektörü için, Öklit uzunluğu, üçgen eşitsizliğini sağlar:*

$$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \tag{17.10}$$

İSPAT:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \left(|x_i| + |y_i|\right), (\text{üçgen eşitsizliği}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \cdot |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \cdot |y_i| \\
&\leq \|x+y\|_2 \cdot \|x\|_2 + \|x+y\|_2 \cdot \|y\|_2\,, \\
&\quad (\text{Cauchy-Schwarz eşitsizliği}) \\
&= \|x+y\|_2 \cdot \left(\|x\|_2 + \|y\|_2\right)
\end{aligned}$$

çıkar. Şimdi, eğer $\|x+y\|_2 = 0$ ise aradığımız eşitsizlik zaten vardır. Eğer $\|x+y\|_2 \neq 0$ ise, vardığımız son eşitsizliğin iki yanını $\|x+y\|_2$ ile bölersek, istenen şey çıkar.

Örnek 17.1.7. $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n(n \geq 1)$ vektör uzayları, Öklid uzunluğuna göre, normlanmış birer uzaydır.

İSPAT: Bu uzaylardan $\mathbb{R}$'ye tanımlanan

$$x \to \|x\|_2$$

fonksiyonunun norm aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

[N1] Minkowski eşitsizliğinden hemen görülür.

[N2]

$$\begin{aligned}\|x\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \cdot \|x\|_2\end{aligned}$$

[N3] Eğer $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ ise x_i bileşenlerinden enaz birisi sıfırdan farklıdır. Bu durumda $\|x\|_2 \neq 0$ olacağı apaçıktır.

Şimdi yukarıdaki örneklerde $n \to \infty$ iken oluşan durumu inceleyelim.

Tanım 17.1.4. Terimleri gerçel ya da karmaşık sayılardan oluşan ve terimlerinin salt değerlerinin toplamı sonlu olan $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ dizilerinin oluşturduğu kümeye ℓ_1 uzayı denilir. Bu uzay (17.3) normunun sonsuz boyuta genelleşmesidir.

$$\ell_1 = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \quad : \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\} \tag{17.11}$$

Örnek 17.1.8. ℓ_1 kümesinin $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir doğrusal uzay (vektör uzayı) olduğunu görmek kolaydır. Bu uzay üzerinde

$$x \to \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \tag{17.12}$$

diye tanımlanan dönüşüm bir normdur. (Norm aksiyomlarını sağlayınız.)

Tanım 17.1.5. Terimleri gerçel ya da karmaşık sayılardan oluşan ve terimlerinin *en küçük üst sınırı (sup) sonlu* olan $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ dizilerinin oluşturduğu kümeye ℓ_∞ uzayı denilir. Bu uzay (17.5) normunun sonsuz boyuta genelleşmesidir.

$$\ell_\infty = \big\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \quad : \quad \sup\{|x_n|, \quad n \in \mathbb{N}\} < \infty \big\} \tag{17.13}$$

Örnek 17.1.9. ℓ_∞ kümesinin $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir doğrusal uzay (vektör uzayı) olduğunu görmek kolaydır. Bu uzay üzerinde

$$x \to \|x\|_\infty = \sup\left\{|x_n| \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} \tag{17.14}$$

diye tanımlanan dönüşüm bir normdur. (Norm aksiyomlarını sağlayınız.)

Tanım 17.1.6. Terimleri gerçel ya da karmaşık sayılardan oluşan ve terimlerinin salt değerlerinin karelerinin toplamı sonlu olan bütün dizilerin oluşturduğu uzaya ℓ_2 -uzayı denilir. Bu uzay (17.7) Öklit normunun sonsuz boyuta genellemesidir.

$$\ell_2 = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\right\} \tag{17.15}$$

ℓ_2 kümesinin $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğu kolayca görülebilir. Bu uzay, analizde önemli rol oynayan bir *Hilbert uzayıdır.* ℓ_2 uzayında

$$x \to \|x\|_2 \tag{17.16}$$

fonksiyonunun bir norm olduğunu göstermek için, öncelikle, *Cauchy-Schwarz ve Minkowski eşitsizliklerinin* $(\ell_2, \|.\|)$ uzayında da geçerli olduğunu göstermeliyiz.

Önerme 17.1.4. Cauchy-Schwarz eşitsizliği $(\ell_2, \|.\|)$ *uzayında da geçerlidir.*

İSPAT: $n \to \infty$ iken (17.1.4) bağıntısı geçerlidir. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ gerçel ya da karmaşık terimli iki dizi ise

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|x\| \cdot \|y\| \tag{17.17}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17.18}$$

yazabiliriz. Çünkü, sağ yandaki serilerden birisi ıraksıyorsa sağ yan sonsuz olacağından eşitsizlik doğru olur. Eğer sağ yandaki serilerin her ikisi de yakınsaksa, sağ yan sonludur ve kısmi toplamlar dizisi, her doğal n sayısı için (17.9) eşitsizliğini sağlar. Yakınsak serinin toplamı tanımına göre, $n \to \infty$ iken eşitsizlik bozulmayacaktır. Böyle oluşu bize (17.18) eşitsizliğini verir.

Önerme 17.1.5. Minkowski eşitsizliği $(\ell_2, \|.\|)$ *uzayında da geçerlidir.*

İSPAT: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ gerçel ya da karmaşık terimli her hangi iki sonsuz dizi ise aşağıdaki üçgen eşitsizliği sağlanır:

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \tag{17.19}$$

İSPAT:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\| + \|y\| \tag{17.20}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17.21}$$

Çünkü (17.10) eşitsizliğinde $n \to \infty$ yapmak yetecektir. Bu iş, daha önce Cauchy-Schwarz eşitsizliğini genelleştirirken yaptığımıza benzer düşünüşle yapılabilir.

Önerme 17.1.6. $(\ell_2, \|.\|)$ *uzayı normlanmış bir uzaydır.*

İSPAT:
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2$ için

$$x \to \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17.22}$$

diye tanımlanan dönüşümün norm aksiyomlarını sağladığını göstereceğiz. [N1] aksiyomunun sağlandığı Minkowski eşitsizliğinden çıkar. Öteki iki aksiyomun sağlandığı apaçıktır.

Örnek 17.1.10. Bir $[a, b]$ aralığı üzerinde Riemann integrali varolan karmaşık değerli bütün fonksiyonların oluşturduğu kümeye $\mathfrak{R}[a, b]$ diyelim. Bu küme $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzay üzerinde

$$f \to \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx \tag{17.23}$$

dönüşümü bir yarı norm olur, ama bir norm değildir. Buna $\mathfrak{L}^1$- yarı normu diyeceğiz.

Gerçekten [N1] ve [N2] aksiyomları integral özelliklerinden hemen görülür. Öte yandan bu uzaya ait bir f fonksiyonu için $\|f\|_1 = 0$ olması, yani

$$\int_a^b \|f(x)\|dx = 0$$

olması $f = 0$ olmasını gerektirmez. (Neden?) Bu dönüşümü norm yapabilmek için nasıl bir yol izlenebilir?

Örnek 17.1.11. Bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve sürekli bütün fonksiyonların oluşturduğu kümeyi $C[a, b]$ ile göstereceğiz. Bu küme, $\mathscr{R}[a, b]$ vektör uzayının bir alt-vektör uzayıdır. Yukarıdaki $\mathfrak{L}^1$- yarı-normu $C[a, b]$ üzerinde bir norm olur. Neden?

Örnek 17.1.12. Her hangi bir X kümesi üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve sınırlı bütün fonksiyonların oluşturduğu $\mathfrak{B}(X)$ kümesi, karmaşık sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzay üzerinde

$$f \to \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in X\} \tag{17.24}$$

dönüşümü bir normdur. Buna düzgün yakınsama normu denilir. Bunun bir norm olduğunu gösteriniz.

Örnek 17.1.13. Lebesgue integraline göre, $[0, 1]$ aralığı üzerinde salt değerlerinin kareleri integrallenebilen karmaşık değerli bütün fonksiyonların uzayını $\mathfrak{L}^2[0, 1]$ ile gösterelim. Bu uzay üzerinde

$$\varphi \to \|\varphi\|_2 = \left(\int_0^1 \|\varphi(x)\|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17.25}$$

diye tanımlanan dönüşümün bir yarı-norm olduğu integral kuramından bilinir. Ama, integrali sıfıra eşit pozitif değerli bir fonksiyon için ancak hemen hemen her yerde sıfır olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla yukarıdaki dönüşüm bir norm değildir.

Bunu norm yapabilmek için $L^2[0, 1]$ uzayını hemen hemen her yerde birbirine eşit olan fonksiyonların oluşturduğu denklik sınıflarına ayıralım ve bu denklik sınıflarının oluşturduğu uzayı $\mathfrak{L}^2[0, 1]$ ile gösterelim. Bu uzay üzerinde (1.18) dönüşümünün bir norm olduğu gösterilebilir.

17.1.1 Problemler

1. Karmaşık sayılar kümesi üzerinde, her sayıyı o sayının salt değerine götüren dönüşümün bir norm olduğunu gösteriniz.

2. Bu bölümde ayrıntılı ispatları verilmeden geçilen örnekleri ayrıntılarına inerek ispatlayınız.