Soyut Cebire Giriş

ARASINAV SORULARININ CEVAPLARI

1. Her $(m,n)\in K$ için $mn=nm$ olduğundan, $(m,n)\beta(m,n)$ ve böylece β nın yansıma özelliği vardır. $(m,n),\ (r,s)\in K$ için $(m,n)\beta(r,s)\Leftrightarrow ms=nr\Rightarrow rn=sm\Rightarrow(r,s)\beta(m,n)$ olduğundan, β nın yansıma özelliği vardır. β nın geçişme özelliğine sahip olduğu şöyle görülebilir: $(m,n),\ (r,s),\ (t,u)\in K$ için

$$(m,n)\beta(r,s),\ (r,s)\beta(t,u)\Rightarrow ms=nr,\ ru=st$$
$$\Rightarrow msu=nru=nst, s\neq 0\Rightarrow mu=nt\Rightarrow(m,n)\beta(t,u)$$

$[(1,3)]_{\beta}=\{(r,s):r,\ s\in Z,\ s\neq 0\}=\{(r,3r):r\in Z,\ r\neq 0\}$.

2. $x,\ y\in G,\ x*y=z$ olsun. Bu takdirde,

$$z=x*y\Rightarrow x*z=x*x*y=y\Rightarrow x*z*z=y*z$$
$$\Rightarrow x=y*z\Rightarrow y*y*z=y*x\Rightarrow z=y*x\Rightarrow x*y=y*x.$$

3.a) $G=Z$, $H=2Z$, $K=3Z$ alalım. $2,3\in H\cup K$, fakat $2+3\notin H\cup K$.

b) $\Rightarrow$: $H\cup K\leq G$, $H\not\subset K$ ve $K\not\subset H$ ise, $h\in H\backslash K$ ve $k\in K\backslash H$ alalım. Bu takdirde, $h,k\in H\cup K$ fakat $hk\notin H\cup K$ olur. Çelişki. (Grup işlemi olarak çarpımsal gösterim kullanılmıştır.)

$\Leftarrow$: $H\subseteq K$ ise, $H\cup K=K$ ve $K\subseteq H$ ise, $H\cup K=H$.

4. $\alpha=(1\ 3)(2\ 4)(1\ 2\ 5\ 4\ 3)(1\ 5)(1\ 2)(2\ 3)=(1\ \ 5\ \ 4)(2\ 3)$

a) $|\alpha|=3\cdot 2=6$ **b)** $\alpha^{-1}=(1\ 4\ 5)(2\ 3)$ **c)** $\alpha=(1\ 4)(1\ 5)(2\ 3)$ tektir.

5. Lagrange Teoremine göre $|K|\,\big|\,|H|$ ve $|H|\,\big|\,|G|$ olduğundan, $|H|\in\{60,100\}$.

6. $H\cap K=M$ olsun. Lagrange Teoremine göre $|M|\,\big|\,|H|$ ve $|M|\,\big|\,|K|$. $|H|$ ile $|K|$ aralarında asal ise, $|M|=1$, yani $H\cap K=\{e\}$ olur.

7.a) $x\in G$ alalım. Eğer $x\in H$ ise, $x^2\in H$. Eğer $x\notin H$ ise, $x^2\notin xH$ dir ve $G=H\cup xH$ ayrık birleşiminden $x^2\in H$ olduğu sonucu çıkar.

b) $G=S_3$, $H=<(1\ 2)>$, $x=(1\ 3)$. $Sol_G(H)=\{H,(1\ 3)H,(2\ 3)H\}$ ve $(G:H)=3$ olup $x^3=x\notin H$ dir.

8. Her $h \in H$ ve $k \in K$ için, $hkh^{-1}k^{-1} = h(kh^{-1}k^{-1}) = (hkh^{-1})k^{-1}$ ifadeleri ve $H \lhd G$, $K \lhd G$ olduğu göz önüne alınarak, $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K$ olduğu görülür. $H \cap K = \{e\}$ ise, $hkh^{-1}k^{-1} = e$ ve böylece $hk = kh$ olduğu görülür.

9. G/M devirli grup olduğu halde G nin Abel grubu olmadığını farzedelim. Bu takdirde, $G/M \neq \{M\}$ olur. $G/M = < zM >$ olacak biçimde bir $z \in G \backslash M$ bulunur. Şimdi herhangi bir $x \in G$ için $xM = z^k M$ olacak biçimde $k \in Z$ bulunur; $m \in M$ olmak üzere, $x = z^k m$ olsun. Bu durumda, $z^k m = m z^k = x$ olacağından $zx = z(z^k m) = z^{k+1} m = z(z^k m) = xz$ elde edilir. Bu, $z \in G \backslash M$ olması ile çelişir.

10. $G = Z$ ve $G' = Z_4$ grupları için $Oto(G) \cong Oto(G') \cong Z_2$ dir.