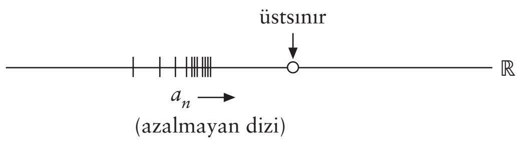
18. Sınırlı ve Artan Diziler

Bu bölümde kanıtlayacağımız teoremi, "artan ve üstten sınırlı bir gerçel sayı dizisinin üstsınıra çarpmasına ramak kalır" biçiminde özetleyebiliriz. (Üstsınır kavramını Bölüm 19'da göreceğiz.)



İşte teorem:

Teorem 18.1. *Sınırlı ve artan her gerçel sayı dizisi Cauchy dizisidir, dolayısıyla böyle bir dizinin ℝ'de limiti vardır.*

Kanıt: Kanıtın ana fikri belli: Eğer dizi artansa ama her sayıyı aşamıyorsa, o zaman dizinin terimleri belli bir sayıyı aşmamak için giderek daha fazla birbirine sokulmalı, yani dizi bir Cauchy dizisi olmalı. Bu fikri uygulamaya sokalım.

Teoremin doğru olmadığını varsayıp bir çelişki elde edelim. $(a_n)_n$, sınırlı ve artan ama Cauchy olmayan bir dizi olsun.

$(a_n)_n$ Cauchy dizisi olmadığından, öyle bir $\varepsilon > 0$ gerçel sayısı vardır ki, her N için,

$$|a_n - a_m| \geq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan n, $m > N$ vardır. Dizi arttığından, bunu şöyle de yazabiliriz: Öyle bir $\varepsilon > 0$ gerçel sayısı vardır ki, her N için,

$$a_n - a_m \geq \varepsilon$$

sağlayan $n > m > N$ vardır. Böyle bir ε'u sabitleyip dizinin ayyuka çıkmak zorunda olduğunu gösterelim. Yukardaki özelliğe (*) adını verelim.

(*) özelliğinde $N = 0$ alalım. O zaman,

$$a_{n_1} - a_{n_0} \geq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan $n_1 > n_0 > 0$ vardır.

(*) özelliğinde $N = n_1$ alırsak, $a_{n_3} - a_{n_2} \geq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan $n_3 > n_2 > n_1$ göstergeçleri buluruz. $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ olduğundan, $a_{n_3} - a_{n_1} \geq a_{n_3} - a_{n_2} \geq \varepsilon$ olur. Özetle: $n_3 > n_1$ için,

$$a_{n_3} - a_{n_1} \geq \varepsilon.$$

Ardından, (*) özelliğinde $N = n_3$ alarak, $a_{n_5} - a_{n_4} \geq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan $n_5 > n_4 > n_3$ buluruz. $a_{n_4} \geq a_{n_3}$ olduğundan, $a_{n_5} - a_{n_3} \geq a_{n_5} - a_{n_4} \geq \varepsilon$ olur: Özetle: $n_5 > n_3 > n_1$ için,

$$a_{n_5} - a_{n_3} \geq \varepsilon.$$

Bunu böylece sürdürebiliriz: Eğer, her $i = 1, 2, ..., k-1$ için,

$$a_{n_{2i+1}} - a_{n_{2i-1}} \geq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan

$$n_0 < n_1 < n_3 < n_5 < ... < n_{2k+1}$$

göstergeçleri bulunmuşsa, bir sonraki aşamada, (*) özelliğinde $N = n_{2k+1}$ alıp,

$$a_{n_{2k+3}} - a_{n_{2k+2}} \geq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan

$$n_{2k+1} < n_{2k+2} < n_{2k+3}$$

göstergeçleri bulunur. $a_{n_{2k+2}} \geq a_{n_{2k+1}}$ olduğundan,

$$a_{n_{2k+3}} - a_{n_{2k+1}} \geq a_{n_{2k+3}} - a_{n_{2k+2}} \geq \varepsilon$$

olur.

Şimdi $a_{n_{2k+1}}$'in k ile birlikte çok büyüdüğünü, her sayıyı aştığını gösterelim.

Önce bulduklarımızı altalta yazalım:

$$a_{n_3} - a_{n_1} \geq \varepsilon$$
$$a_{n_5} - a_{n_3} \geq \varepsilon$$
$$a_{n_7} - a_{n_5} \geq \varepsilon$$
$$\ldots$$
$$a_{n_{2k+3}} - a_{n_{2k+1}} \geq \varepsilon.$$

Ve bunları toplayalım. Sadeleştirmelerden sonra şu kalır:

$$a_{n_{2k+3}} - a_{n_1} \geq (k+1)\varepsilon,$$

yani

$$a_{n_{2k+3}} \geq (k+1)\varepsilon + a_{n_1}$$

buluruz. Görüldüğü gibi, eğer k'yi yeterince büyük alırsak, $a_{n_{2k-1}}$ terimi her sayıyı aşar ve bu da dizinin sınırlı olmasıyla çelişir. □

Sonuç 18.2. *Sınırlı ve azalan her gerçel sayı dizisi Cauchy dizisidir, dolayısıyla böyle bir dizinin $\mathbb{R}$'de limiti vardır.*

Kanıt: Eğer $(a_n)_n$, sınırlı ve azalan bir diziyse, $(-a_n)_n$, sınırlı ve artan bir dizidir, dolayısıyla Cauchy'dir. Dolayısıyla $(a_n)_n$ dizisi de Cauchy'dir. □

Alıştırmalar

18.1. Eğer $r \in (0, 1)$ ise $(r^n)_n$ dizisinin azalan ve alttan sınırlı olduğunu kanıtlayın. Dizinin limitinin 0 olduğunu kanıtlayın. (**İpucu:** Limite ℓ diyelim. $(r^{2n})_n$ dizisi hem ℓ'ye hem ℓ^2'ye yakınsar. Teorem 10.2'de bunu $\mathbb{Q}$ için kanıtlamıştık, ama bu kanıt değişik.)

18.2. $(a_n)_n$ artan ve a'ya yakınsayan bir diziyse, her n için, $a_n \leq a$ eşitliğini kanıtlayın.

18.3*. Teorem 18.1'in Arşimet olmayan sıralı cisimler için yanlış olduğunu gösterin.

18A. İki Yakınsak Gerçel Dizi Örneği

Burada geçen bölümde kanıtladığımız teoremin birkaç uygulamasını göreceğiz. Teoremi anımsayalım: *Sınırlı ve azalmayan her gerçel sayı dizisi Cauchy dizisidir*, *dolayısıyla böyle bir dizinin* $\mathbb{R}$*'de limiti vardır*.

Örnek 18A.1. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için*, $\lim_{n\to\infty} r^n/n! = 0$.

Kanıt: Bunu Örnek 10.5'te $\mathbb{Q}$ için kanıtlamıştık. Burada aynı şeyi çok daha kolay biçimde $\mathbb{R}$ için yapacağız. Alıştırma 17.4'e göre, r yerine $|r|$ alarak $r \geq 0$ varsayımını yapabiliriz. $x_n = r^n/n! \geq 0$ olsun. x_{n+1} ile x_n arasında çok basit bir ilişki vardır:

$$x_{n+1} = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{r}{n+1}\frac{r^n}{n!} = \frac{r}{n+1}x_n.$$

Eğer n'yi yeterince büyük, diyelim N'den büyükeşit seçersek, $r/(n+1)$ sayısı 1'den küçük olur ve $x_{n+1} < x_n$ eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik her $n > N$ için doğru olduğundan, bundan, $(x_n)_n$ dizisinin bir zaman sonra azalan bir dizi olduğu anlaşılır. Sonuç 17.2'ye göre dizinin N'inci terimden sonraki kuyruğu belli bir x sayısına yakınsar; dolayısıyla dizinin kendisi de x'e yakınsar. Bu x'i bulmalıyız. Yukarda kanıtladığımız

$$x_{n+1} = \frac{r}{n+1}x_n$$

eşitliğinin her iki tarafınının da n sonsuza giderken limitini alırsak, $x = 0 \cdot x = 0$ buluruz.

Örnek 18A.2. $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$ *vardır ve* 2 *ile* 3 *arasında bir sayıdır.*

Birinci Adım. *Her* $n > 0$ *doğal sayısı ve her* $x > -1$ *için,*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Kanıt n üzerine tümevarımladır ve çok kolaydır.

İkinci Adım. *Her* $n > 0$ *doğal sayısı için,*

$$2 \leq (1 + 1/n)^n \leq 3.$$

Birinci adımda $x = 1/n$ alırsak, $2 \leq (1 + 1/n)^n$ eşitsizliği hemen çıkar. $(1 + 1/n)^n \leq 3$ eşitsizliği aşağıdaki dikkatli hesaptan çıkar.

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum\nolimits_{i=0}^n \binom{n}{i}\frac{1}{n^i} \\
&= 1+\sum\nolimits_{i=1}^n \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i}\frac{1}{n^i} \\
&= 1+\sum\nolimits_{i=1}^n \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-i+1}{n}\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i} \\
&= 1+\sum\nolimits_{i=1}^n \left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i} \\
&< 1+\sum\nolimits_{i=1}^n \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i} \leq 1+\sum\nolimits_{i=1}^n \frac{1}{2^{i-1}} \\
&= 1+\frac{1-\frac{1}{2^i}}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+2 = 3.
\end{aligned}$$

Üçüncü Adım. *Her* $n > 0$ *doğal sayısı için,*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Sağdaki ifadeyle biraz oynayalım.

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$=\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)^{n+1}$$

eşitliğinden dolayı, $a = 1 + 1/n$ yazarsak, kanıtlamak istrediğimiz eşitsizlik,

$$a^n \le \left(a-\frac{1}{n(n+1)}\right)^{n+1}$$

eşitsizliğine, yani

$$\frac{1}{a}\le\left(1-\frac{1}{an(n+1)}\right)^{n+1}$$

eşitsizliğine, yani

$$\frac{n}{n+1}\le\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$

eşitsizliğine dönüşür. Ama dikkat edilirse bu aynen $x = 1/(n+1)^2$ için, birinci adımdaki eşitsizliktir bu:

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\le 1-\frac{n+1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Artık kanıtımız tamamlanmıştır.

Analiz ders notlarında [GA] bu dizinin e adı verilen matematiğin ve evrenin çok önemli bir sabitine yakınsadığını göstereceğiz.

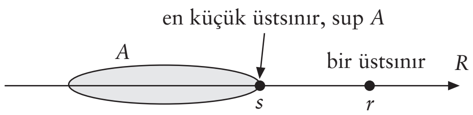
19. En Küçük Üstsınır

$\mathbb{R}$'nin tamlığını, yani $\mathbb{R}$'nin her temel dizisinin yakınsak olduğunu gösterdik. Bu, $\mathbb{Q}$'de olmayan bir özellikti. Bu bölümde $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Q}$'de olmayan "bir başka" önemli özelliğini göstereceğiz. "Bir başka"yı tırnak içinde yazmamızın nedeni, göstereceğimiz bu yeni özelliğin aslında $\mathbb{R}$'nin tamlığına eşdeğer olması yani aslında gerçekten bir başka özellik olmaması...

Önce teoremi yazalım, teoremde geçen terimleri hemen akabinde tanımlayacağız.

Teorem 19.1. *$\mathbb{R}$'nin boş olmayan ve üstten sınırlı olan her altkümesinin bir en küçük üstsınırı vardır.*

Önce teoremdeki terimleri açıklayalım. R tamsıralı bir küme olsun, örneğin $R = \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{Q}$ olabilir (bildiğimiz sıralamayla). $A \subseteq R$ ve $r \in R$ olsun. Eğer her $a \in A$ için, $a \leq r$ ise, r'ye A'nın ***üstsınırı*** adı verilir. Eğer $s \in R$, A'nın üstsınırlarının en küçüğüyse, yani s, A'nın bir üstsınırıysa ve A'nın her r üstsınırı için $s \leq r$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman s'ye A'nın (R'de) ***en küçük üstsınırı*** adı verilir. Herhangi bir A ve R için, A'nın



üstsınırı olmayabilir. Ayrıca bir üstsınır olduğunda da üstsınırların en küçüğü olmayabilir. Örneğin, $A = \mathbb{Z}$ ve $R = \mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{R}$ ise, A'nın R'de üstsınırı yoktur. Eğer $R = \mathbb{Q}$ ve

$$B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$$

ise B'nin ($\mathbb{Q}$'de) üstsınırı vardır ama ($\mathbb{Q}$'de) en küçük üstsınırı yoktur (bkz. Alıştırma 3). Öte yandan lise yıllarından beri bilindiği üzere B'nin $\mathbb{R}$'de en küçük üstsınırı vardır (ve bu en küçük üstsınır $\sqrt{2}$ diye yazılan gerçel sayıdır.) Bu bölümde bunu matematiksel olarak kanıtlayacağız.

Bir A altkümesinin en küçük üstsınırı, varsa, biriciktir elbette (neden elbette?) ve bu eleman sup A ya da eküs(A) diye yazılır. Eğer en küçük üstsınırın R'de alındığı illa belirtilmek isteniyorsa, o zaman $\sup_R A$ yazılımı yeğlenir.

Alıştırmalar

19.1. S tamsıralı bir küme ve $A \subseteq R \subseteq S$ olsun. $\sup_S A$ ve $\sup_R A$ varsa $\sup_S A \leq \sup_R A$ eşitsizliğini kanıtlayın.

19.2. Öyle tamsıralı bir S ve $A \subseteq R \subseteq S$ altkümeleri bulun ki,

a. $\sup_R A$ olsun ve A'nın bir elemanı olsun.

b. $\sup_R A$ olsun ama A'nın bir elemanı olmasın.

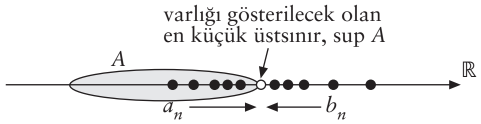
c. $\sup_R A$ olmasın ama $\sup_S A$ olsun.

d. $\sup_S A$ olmasın ama $\sup_R A$ olsun.

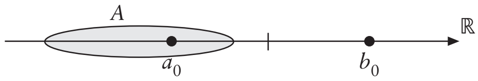
19.3. $B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ kümesinin $\mathbb{Q}$'de bir en küçük üstsınırı olmadığını kanıtlayın.

19.4. Bir kümenin en fazla bir tane en küçük üstsınırı olabileceğini kanıtlayın.

Teorem 1'in Kanıtı: A, $\mathbb{R}$'nin boş olmayan ve üstten sınırlı bir altkümesi olsun. Amacımız, bir azalmayarak diğeri artmayarak üstsınıra yakınsayan $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizileri bulmak. Bu dizilerin ortak limiti A'nın üstsınırı olacak.



A boşküme olmadığından, A'dan bir a_0 elemanı alabiliriz. b_0 da A'nın bir üstsınırı olsun. Elbette $a_0 \le b_0$.



Şimdi a_0'la b_0'ın orta noktası olan $(a_0 + b_0)/2$'ye bakalım. Eğer bu sayı A'nın bir üstsınırı değilse

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

$$b_1 = b_0$$

olsun. Eğer bu sayı A'nın bir üstsınırıysa,

$$a_1 = a_0$$

$$b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

olsun. Bir sonraki aşamayı aynı biçimde a_0 ve b_0 yerine a_1 ve b_1'le devam ettirelim. Genel olarak,

- $b_{i+1} - a_{i+1} = (b_i - a_i)/2$,
- A'da a_i'den büyükeşit bir eleman vardır,
- b_i, A'nın bir üstsınırıdır

özelliklerini sağlayan bir

$$a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_n \le b_n \le \ldots \le b_1 \le b_0$$

dizisi bulduğumuzu varsayalım. Yukardaki yöntemle diziyi bir adım daha götürebiliriz: a_n ile b_n'nin orta noktası olan

$$(a_n + b_n)/2$$

sayısına bakalım. Eğer bu sayı A'nın bir üstsınırı değilse o zaman

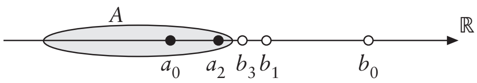
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$b_{n+1} = b_n$$

olsun. Eğer bu sayı A'nın bir üstsınırıysa,

$$a_{n+1} = a_n$$
$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

olsun. İstenen tüm özellikler sağlanır.



Her a_{i+1}, ya a_i'ye eşit ya da a_i ve b_i'nin orta noktası.
Her b_{i+1}, ya b_i'ye eşit ya da a_i ve b_i'nin orta noktası.

$(a_n)_n$ artan ve üstten (b_n'ler tarafından) sınırlı bir dizi olduğundan bir limiti vardır (Teorem 18.1.) Bu limite a adını verelim. Benzer nedenden $(b_n)_n$ dizisinin de bir limiti vardır; bu limite de b diyelim. Elbette, her n için,

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n$$

eşitlikleri doğrudur (Alıştırma 18.2). Ama

$$b_{i+1} - a_{i+1} = (b_i - a_i)/2$$

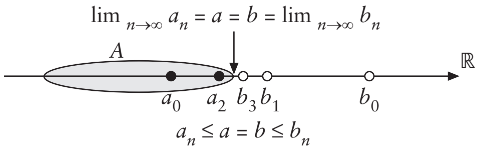
eşitliğinden dolayı, her n için,

$$b_n - a_n = (b_0 - a_0)/2^n$$

eşitliği de doğrudur. Demek ki,

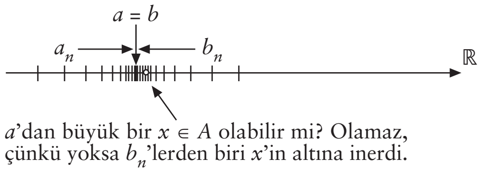
$$0 \leq b_n - a_n = (b_0 - a_0)/2^n < (b_0 - a_0)/n$$

ve tarafların limitini alırsak, sağ taraf 0'a gittiğinden, Sandviç Teoremi'nden dolayı (Teorem 9.10) $b = a$ buluruz.

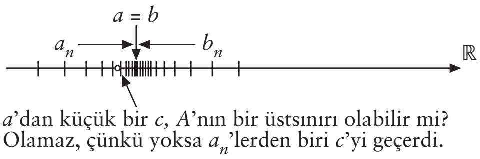


Şimdi a'nın A'nın en küçük üstsınırı olduğunu kanıtlayalım.

Her şeyden önce a, A'nın bir üstsınırı olduğunu kanıtlamalıyız. Aşağıdaki şekilden takip edin. Eğer $x \in A$, a'dan büyük olsaydı, o zaman, $(b_n)_n$ dizisi azalarak (daha doğrusu artmayarak) $b = a$'ya yakınsadığından, belli bir n için, $a \leq b_n < x$ olurdu ki, b_n bir üstsınır olduğundan bu imkânsızdır.



Peki a, A'nın en küçük üstsınırı mıdır? Eğer c, a'dan küçük A'nın bir başka üstsınırı olsaydı, $(a_n)_n$ dizisi artarak (daha doğ-



rusu azalmayarak) a'ya yakınsadığından, belli bir n için,

$$c < a_n \leq a$$

olurdu ki, bu da c'nin A'nın üstsınırı olmasıyla çatışırdı. (Çünkü A'da a_n'den büyükeşit bir eleman vardır ve bu eleman c'den de büyük olurdu...) □

Altsınır ve en büyük altsınır kavramlarını tanımlamayı ve aşağıdaki sonucu teoremden çıkarmayı okura bırakıyoruz.

Sonuç 19.2. *ℝ'nin alttan sınırlı olan ama boş olmayan her altkümesinin bir en büyük altsınırı vardır.*