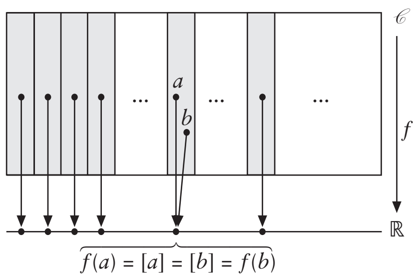
14. Gerçel Sayılarda Dört İşlem

Bir $a \in \mathcal{C}$ temel dizisini (tüm diziler $\mathbb{Q}$-dizileridir) $[a]$ gerçel sayısına götüren $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım:

$$f(a) = [a].$$

Bu fonksiyon elbette örtendir. İşte resmi:



f fonksiyonunu kullanarak, eskiden $\mathcal{C}$ üzerine tanımladığımız toplama, çarpma, çıkarma ve bölme işlemlerinin benzerlerini $\mathbb{R}$ üzerine tanımlayacağız. Yapacağımız iş özetle şu: Diyelim $\mathbb{R}$ üzerine toplamayı tanımlamak istiyoruz. $\mathbb{R}$'den toplamak istediğimiz iki eleman alalım, bu elemanlara r ve s diyelim. Elemanların $\mathcal{C}$'de birer f-önimgesini bulalım ve sırayla onlara a ve b diyelim. Demek ki

$$f(a) = r \text{ ve } f(b) = s.$$

Şimdi a ve b temel dizilerini $\mathcal{C}$'de toplayıp $a + b$ temel dizisini elde edebiliriz. Ve son olarak bu toplamın f imgesini alıp

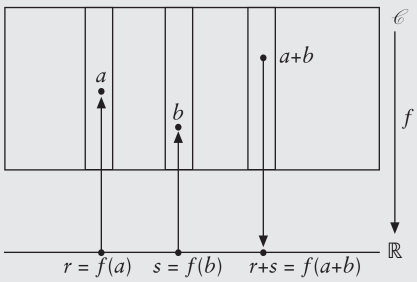
$$f(a + b) \in \mathbb{R}$$

elemanını bulabiliriz. $r + s$ toplamını,

$$r + s = f(a + b)$$

olarak tanımlamayı öneriyoruz, çünkü ne de olsa $a + b$ dizisi de $\mathcal{C}$'de.

$\mathbb{R}$'den $\mathcal{C}$'ye çık, topla ve tekrar $\mathbb{R}$'ye in:

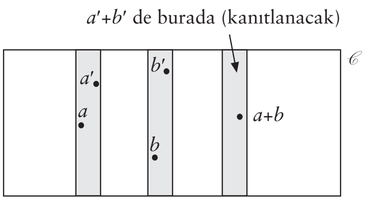


$\mathbb{R}$'de toplamanın tanımı:
1) $r, s \in \mathbb{R}$ verilmiş olsun.
2) $f(a) = r$ ve $f(b) = s$ eşitliğini sağlayan $a, b \in \mathcal{C}$ dizilerini bul.
3) $r + s$'yi $f(a + b)$ olarak tanımla.

Ancak, r ve s gerçel sayıları verildiğinde,

$$f(a) = r \text{ ve } f(b) = s$$

eşitliklerini sağlayan birden çok a ve b vardır; tanımın geçerli olması için bu eşitliği sağlayan tüm a ve b'lerin aynı $f(a + b)$ sonucunu verdiğini kanıtlamalıyız. Bunu kanıtlayacağız.



Çarpmayı da benzer yöntemle tanımlayacağız. Her halkada olduğu gibi çıkarma toplama tarafından, bölme de çarpma tarafından belirlenecek. $\mathbb{R}$'de sıralamayı tanımlamak, çok değil, birazcık daha zordur. Ardından, tanımlanan bu işlemlerin ve sıralamanın tahmin edilen özellikleri sağladığını ve sonuçta sıralı bir cisim (Bölüm 6.4 ve 6A.8) bulduğumuzu ve bu sıralı cisimde $\mathbb{Q}$'nün kusurlarının (Bölüm 7C) olmadığını kanıtlayacağız.

Toplama. Yukarda gördüğümüz gibi, $\mathbb{R}$'de toplamanın önerdiğimiz tanımının geçerli olması için şu önsav kanıtlanmalı:

Önsav 14.1. $a, b, a', b' \in \mathcal{C}$ *olsun. Eğer* $[a] = [a']$ *ve* $[b] = [b']$ *ise* $[a+b] = [a'+b']$ *eşitliği doğrudur.*

Kanıt: Varsayıma göre $a - a' \in \mathcal{Y}_0$ ve $b - b' \in \mathcal{Y}_0$. Dolayısıyla,

$$(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b') \in \mathcal{Y}_0$$

dir, yani $[a+b] = [a'+b']$ eşitliği doğrudur. □

Şimdi artık, $[a]$ ve $[b]$ gerçel sayıları için,

$$[a] + [b] = [a + b]$$

tanımını huzur içinde yapabiliriz, çünkü bu tanım, $\mathcal{C}$'de seçilen a ve b'ye göre değil, $[a]$ ve $[b]$ gerçel sayılarına göre değişmektedir. Eğer bu önsav doğru olmasaydı,

$$[a] = [a'] \textit{ ve } [b] = [b']$$

eşitlikleri doğru olmasına karşın,

$$[a] + [b] = [a'] + [b']$$

eşitliği doğru olmayabilirdi ve o zaman da toplama işleminin tanımı geçerli olmazdı. Toplamayı tanımladıktan sonra toplamanın özelliklerine gelelim.

Önsav 14.2. $(\mathbb{R}, +, [s(0)])$ *değişmeli bir gruptur, yani,*

T1. *Her* $r, s, t \in \mathbb{R}$ *için,* $(r + s) + t = r + (s + t)$.

T2. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $r + [s(0)] = [s(0)] + r = r$.

T3. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $r + s = s + r = [s(0)]$ *eşitliğini sağlayan bir* $s \in \mathbb{R}$ *vardır.*

T4. *Her* $r, s \in \mathbb{R}$ *için* $r + s = s + r$.

Kanıt: $\mathbb{R}$'deki bu eşitlikleri kanıtlamak için f fonksiyonunu kullanıp $\mathcal{C}$'ye çıkacağız. Bu eşitliklerin $\mathcal{C}$'de de geçerli olduğunu kullanıp tekrar f ile $\mathbb{R}$'ye ineceğiz.

T1. $a, b, c \in \mathcal{C}$ için, $r = [a]$, $s = [b]$, $t = [c]$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}(r + s) + t &= ([a] + [b]) + [c] = [a + b] + [c]\\ &= [(a + b) + c] = [a + (b + c)]\\ &= [a] + [b + c] = [a] + ([b] + [c])\\ &= r + (s + t).\end{aligned}$$

T2. $a \in \mathcal{C}$ için, $r = [a]$ olsun. O zaman,

$$r + [s(0)] = [a] + [s(0)] = [a + s(0)] = [a] = r.$$

$[s(0)] + r = r$ eşitliği benzer biçimde kanıtlanır.

T3. $a \in \mathcal{C}$ için, $r = [a]$ olsun. Eğer $a = (a_n)_n$ ise,

$$b = -a = (-a_n)_n \in \mathcal{C}$$

ve

$$s = [b]$$

olsun. İstenen $r + s = s + r = [s(0)]$ eşitliğinin sağlandığını sınamak zor değildir.

T4. $a, b \in \mathcal{C}$ için, $r = [a]$, $s = [b]$ olsun. O zaman,

$$r + s = [a] + [b] = [a + b] = [b + a] = [b] + [a] = s + r$$

olur. □

Önsav 2'nin Ardından:

a) T1'e göre gerçel sayıları toplarken parantez kullanmaya gerek yoktur, örneğin, $(r + s) + t$ yerine $r + s + t$ ve $(r + s) + (t + u)$ yerine $r + s + t + u$ yazabiliriz.

b) $\mathbb{R}$'de T2 özelliğini sağlayan bir ve tek bir eleman vardır (***toplamanın etkisiz elemanı*** denir bu elemana) ve bu eleman, T2'nin söylediği gibi $[s(0)]$'dır. Gelecekte $[s(0)]$ yerine 0 yazacağız ama şimdi değil. Öte yandan daha şimdiden $[s(0)]$ yerine $0_{\mathbb{R}}$ yazmak fena bir fikir değildir, öyle de yapacağız.

c) Eğer $r \in \mathbb{R}$ verilmişse, T3'teki $r + s = s + r = [s(0)] = 0_{\mathbb{R}}$ eşitliğini sağlayan bir ve tek bir $s \in \mathbb{R}$ vardır. Bu elemanı $-r$ olarak göstereceğiz. Kanıtta da görüldüğü üzere, $a \in \mathcal{C}$ için, $-[a] = [-a]$.

d) $\mathbb{R}$'de çıkarmayı iki değişik biçimde tanımlayabiliriz:

$$r - s = r + (-s)$$

olarak ya da $r = [a]$, $s = [b]$ için

$$r - s = [a - b]$$

olarak. İkisi de aynı kapıya çıkar ancak ikinci tanımın geçerli olması için Önsav 2'ye benzer bir sonucun kanıtlanması gerekmektedir. Benzer şekilde

$$-r - s \text{ ve } -r + s$$

işlemlerini de tanımlayabiliriz.

$$-(r - s) = -r + s = s - r$$

gibi eşitlikleri kanıtlamak kolaydır.

Ama dikkat, toplarken paranteze gerek yoksa da çıkarırken parantezleri korumak gerekir. Aksi davranışın bırakın üniversiteye girişi, bale okuluna girişi bile engellediği bilinmektedir.

e) Her grupta olduğu gibi $\mathbb{R}$'de de sadeleştirme yapılabilir. Örneğin, $r + s = r + t$ ise $s = t$ olur. Aynı şekilde $r + s = r$ ise $s = [s(0)] = 0_{\mathbb{R}}$ olur.

f) $[a] + [b] = [a + b]$ formülü, yani

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

formülü,

$$f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun $(\mathcal{C}, +, s(0))$ grubundan $(\mathbb{R}, +, [s(0)])$ grubuna giden bir ***eşyapı fonksiyonu*** (homomorfizma) olduğunu söylüyor. Eşyapı fonksiyonunun anlamını bilmeyenlere: Toplamaya (ya da bir başka işleme) saygı duyan, yani $f(a + b) = f(a) + f(b)$ eşitliğini sağlayan bir gruptan bir başka gruba giden f fonksiyonlarına verilen addır.

Çarpma. Çarpmayı da aynı yöntemle tanımlayacağız. $\mathbb{R}$'den r ve s elemanlarını alalım. r ve s'nin $\mathcal{C}$'de f-önimgelerini bulalım. Bu önimgelere a ve b diyelim. Demek ki

$$f(a) = r \text{ ve } f(b) = s.$$

Şimdi a ve b temel dizilerini $\mathcal{C}$'de çarpıp $ab \in \mathcal{C}$ dizisini elde edebiliriz. Son olarak bu çarpımın f imgesini alıp $f(ab) \in \mathbb{R}$ bulabilir ve rs çarpımını,

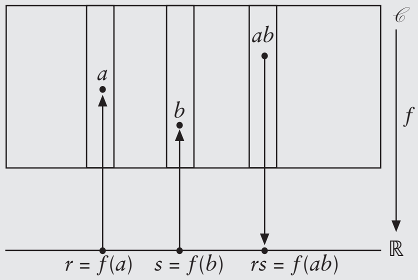
$$rs = f(ab)$$

olarak tanımlamayı uygun bulabiliriz. Yani $a, b \in \mathcal{C}$ için,

$$[a][b] = [ab]$$

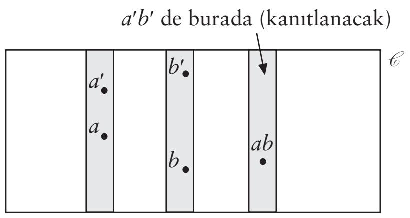
tanımını yapmak istiyoruz.

$\mathbb{R}$'den $\mathcal{C}$'ye çık, çarp ve tekrar $\mathbb{R}$'ye in



$\mathbb{R}$'de çarpmanın tanımı:
1) $r, s \in \mathbb{R}$ verilmiş olsun.
2) $f(a) = r$ ve $f(b) = s$ eşitliğini sağlayan $a, b \in \mathcal{C}$ dizilerini bul.
3) rs'yi $f(ab)$ olarak tanımla.

Ancak r ve s verildiğinde, $f(a) = r$ ve $f(b) = s$ eşitliğini sağlayan birden çok a ve b vardır; tanımın geçerli olması için bu eşitliği sağlayan tüm a ve b'lerin aynı $f(ab)$ sonucunu verdiğini kanıtlamalıyız.



Önsav 14.3. *$a, b, a', b' \in \mathcal{C}$ olsun. Eğer $[a] = [a']$ ve $[b] = [b']$ ise*

$$[ab] = [a'b']$$

eşitliği doğrudur.

Kanıt: Varsayıma göre $a - a' \in \mathcal{Y}_0$ ve $b - b' \in \mathcal{Y}_0$. Dolayısıyla,

$$(ab - a'b') = (a - a')b + a'(b - b') \in \mathcal{Y}_0$$

dir (Önsav 9.7), yani $[ab] = [a'b']$ eşitliği doğrudur. □

Şimdi artık, $[a]$ ve $[b]$ gerçel sayıları için,

$$[a][b] = [ab]$$

tanımını huzur içinde yapabiliriz, çünkü bu tanım, $\mathcal{C}$'de seçilen a ve b'ye göre değil, $\mathbb{R}$'de seçilen $[a]$ ve $[b]$ gerçel sayılarına göre değişmektedir. Eğer bu önsav doğru olmasaydı,

$$[a] = [a'] \text{ ve } [b] = [b']$$

eşitlikleri doğru olmasına karşın,

$$[a][b] = [a'][b']$$

eşitliği doğru olmayabilirdi ve o zaman da çarpma işleminin tanımı geçerli olmazdı.

Kimi zaman $[a][b]$ yerine $[a] \times [b]$ ya da $[a]\cdot[b]$ yazacağız.

Önsav 14.4. *Şu özellikler doğrudur:*

Ç1. *Her* $r, s, t \in \mathbb{R}$ *için,* $(rs)t = r(st)$.

Ç2. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $r\cdot[s(1)] = [s(1)]\cdot r = r$.

Ç3. *Her* $0_\mathbb{R} \neq r \in \mathbb{R}$ *için,* $rs = sr = [s(1)]$ *eşitliğini sağlayan bir*

$$0_\mathbb{R} \neq s \in \mathbb{R}$$

vardır.

Ç4. *Her* $r, s \in \mathbb{R}$ *için* $rs = sr$.

Kanıt: Aynen bir önceki kanıt gibi. $\mathbb{R}$'deki bu eşitlikleri kanıtlamak için f fonksiyonunu kullanıp $\mathcal{C}$'ye çıkacağız. Bu eşitliklerin $\mathcal{C}$'de de geçerli olduğunu kullanıp tekrar f ile $\mathbb{R}$'ye ineceğiz.

Ç1, Ç2, Ç4. Önsav 2'nin T1, T2 ve T4'ün kanıtıyla aynı olduğundan kanıtı okura bırakıyoruz.

Ç3. $a = (a_n)_n \in \mathcal{C}$ için, $r = [a]$ olsun. $\mathcal{Y}_0 = [s(0)] = 0_\mathbb{R} \neq r = [a]$ olduğundan, a, $\mathcal{Y}_0$'da değildir, yani 0'a yakınsayamaz. Teorem 12.3'e göre her $n > N$ için $a_n \neq 0$ eşitsizliğinin sağlandığı bir N göstergeci vardır.

$$b_n = \begin{cases} a_n^{-1} & \text{eğer } n > N \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n \leq N \text{ ise} \end{cases}$$

ve $b = (b_n)_n$ olsun. Teorem 11.11'e göre b bir temel dizidir. O zaman ab dizisi bir zaman sonra sabit 1 dizisi olur ve dolayısıyla limiti 1'dir. Demek ki $ab - s(1)$ dizisi 0'a yakınsar, yani $\mathcal{Y}_0$'dadır. Demek ki, $[a][b] = [ab] = [s(1)]$ olur. □

Sonuç 14.5. $(\mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}, \times, [s(1)])$ *değişmeli bir gruptur, yani,*

Ç1. *Her* $r, s, t \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ *için,* $(rs)t = r(st)$.

Ç2. *Her* $r \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ *için,* $r \cdot [s(1)] = [s(1)] \cdot r = r$.

Ç3. *Her* $r \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ *için,* $rs = sr = [s(1)]$ *eşitliğini sağlayan bir* $s \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ *vardır.*

Ç4. *Her* $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ *için* $rs = sr$.

Önsav 4 ve Sonuç 5'in Getirdikleri:

a) Ç1'e göre gerçel sayıları çarparken parantez kullanmaya gerek yoktur, örneğin, $(rs)t$ yerine rst ve $(rs)(tu)$ yerine $rstu$ yazabiliriz.

b) $\mathbb{R}$'de Ç2 özelliğini sağlayan bir ve tek bir eleman vardır (çarpmanın etkisiz elemanı denir bu elemana) ve bu eleman da Ç2'nin söylediği gibi $[s(1)]$'dir. Gelecekte $[s(1)]$ yerine 1 yazacağız ama şimdilik değil. Öte yandan daha şimdiden $[s(1)]$ yerine $1_\mathbb{R}$ yazmak fena bir fikir değildir.

c) Eğer $r \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ verilmişse, Ç3'teki $rs = sr = 1_\mathbb{R}$ eşitliğini sağlayan bir ve tek bir $s \in \mathbb{R}$ vardır. Bu elemanı s^{-1} olarak göstereceğiz. Kanıtta da görüldüğü üzere, $a \in \mathcal{C}$ için, tam olarak $[a]^{-1} = [a^{-1}]$ olmasa da bu eşitlik gerçek'ten çok çok uzak değil.

d) $\mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$'de bölmeyi

$$r/s = rs^{-1}$$

olarak tanımlayabiliriz.

$$r^{-1}s^{-1} = (rs)^{-1},$$
$$(r^{-1})^{-1} = r,$$

gibi eşitlikleri kanıtlamak kolaydır.

e) Her grupta olduğu gibi $\mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ grubunda da sadeleştirme yapılabilir. Örneğin, $rs = rt$ ise ve $r \neq 0_\mathbb{R}$ ise $s = t$ olur. Bu, s ya da t, $0_\mathbb{R}$'ye eşitse de geçerlidir. Aynı şekilde $rs = r$ ise ve $r \neq 0_\mathbb{R}$ ise $s = 1_\mathbb{R}$ olur.

Toplama ve Çarpma. Yukarda, önce sadece toplamayı ilgilendiren, ardından sadece çarpmayı ilgilendiren özellikleri bulduk. Şimdi bu bölümde, hem toplamayı hem de çarpmayı harmanlayan özelliği bulacağız.

Önsav 14.6. *Gerçel sayılarda çarpma toplamaya göre dağılır, yani her $r, s, t \in \mathbb{R}$ için,*

$$(r + s)t = rt + st$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: Her zamanki gibi $\mathcal{C}$'ye çıkıp $\mathcal{C}$'de benzer eşitliği kullanarak kanıtlanır. Ayrıntılar okura bırakılmıştır. □

Bunun bir sonucu olarak, her $r \in \mathbb{R}$ için,

$$r0_\mathbb{R} = 0_\mathbb{R}r = 0_\mathbb{R}$$

eşitliği doğrudur. Nitekim,

$$r0_\mathbb{R} = r(0_\mathbb{R} + 0_\mathbb{R}) = r0_\mathbb{R} + r0_\mathbb{R}$$

ve buradan da sadeleştirerek, $r0_\mathbb{R} = 0_\mathbb{R}$ bulunur.

Teorem 14.7. $(\mathbb{R}, +, \times, 0_\mathbb{R}, 1_\mathbb{R})$ *yapısı bir cisimdir, yani şu özellikler sağlanır:*

T1. *Her $r, s, t \in \mathbb{R}$ için,* $(r + s) + t = r + (s + t)$.

T2. *Her $r \in \mathbb{R}$ için,* $r + [s(0)] = [s(0)] + r = r$.

T3. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için*, $r + s = s + r = [s(0)]$ *eşitliğini sağlayan bir* $s \in \mathbb{R}$ *vardır*.

T4. *Her* $r, s \in \mathbb{R}$ *için* $r + s = s + r$.

Ç1. *Her* $r, s, t \in \mathbb{R}$ *için*, $(rs)t = r(st)$.

Ç2. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için*, $r \cdot [s(1)] = [s(1)] \cdot r = r$.

Ç3. *Her* $0_{\mathbb{R}} \neq r \in \mathbb{R}$ *için*, $rs = sr = [s(1)]$ *eşitliğini sağlayan bir*

$$0_{\mathbb{R}} \neq s \in \mathbb{R}$$

vardır.

Ç4. *Her* $r, s \in \mathbb{R}$ *için* $rs = sr$.

D. *Her* $r, s, t \in \mathbb{R}$ *için*, $(r + s)t = rt + st$.

Kanıt: Çoktan kanıtlandı bile... □

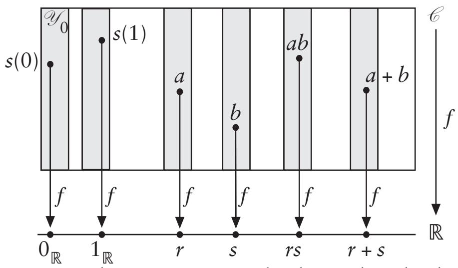
Son olarak, $f(a) = [a]$ kuralıyla tanımlanan

$$f: \mathcal{C} \to \mathbb{R}$$

örten fonksiyonuna bir defa daha bakalım. Bu fonksiyon şu özellikleri sağlar:

$$f(a + b) = f(a + b),$$
$$f(ab) = f(ab),$$
$$f(s(0)) = 0_{\mathbb{R}},$$
$$f(s(1)) = 1_{\mathbb{R}}.$$

Yukardaki eşitlikler, f fonksiyonunun $\mathcal{C}$ halkasından $\mathbb{R}$ halkasına (aslında cismine) giden bir eşyapı fonksiyonu olduğunu söylüyor. Resim aşağıda.



$\mathcal{C}$'nin toplama ve çarpma işlemleri ve bu işlemlerin etkisiz elemanları $\mathbb{R}$'de benzer işlemlere ve elemanlara tekabül ediyor.

Tabii bu arada $\mathcal{C}$'nin bir cisim olmadığını ama $\mathbb{R}$'nin bir cisim olduğunu unutmayalım. (Arife Not: Halkalar kuramınının basit bir sonucuna göre, $\mathbb{R}$'nin cisim olması $\mathcal{Y}_0$'ın $\mathcal{C}$'nin maksimal ideali olduğu anlamına gelir.)

Bir sonraki bölümde $\mathbb{R}$ üzerine bir sıralama tanımlayacağız. Sıralamayı tanımladıktan sonra, $(\mathbb{R}, +, \times, 0_\mathbb{R}, 1_\mathbb{R}, <)$ yapısının sıralı bir cisim olduğunu göreceğiz.

Alıştırma. Eğer $n = 0$ ya da 1 ise $n_\mathbb{R}$'nin ne olduğunu biliyoruz. Eğer $n \geq 1$ bir doğal sayıysa, $n_\mathbb{R} \in \mathbb{R}$ sayısını tümevarımla şöyle tanımlayalım (bkz. Bölüm 6A.5):

$$(n+1)_\mathbb{R} = n_\mathbb{R} + 1_\mathbb{R}.$$

$(-n)_\mathbb{R}$ sayısını da $(-n)_\mathbb{R} = -(n_\mathbb{R})$ olarak tanımlayalım. Böylece her $n \in \mathbb{Z}$ için $n_\mathbb{R}$ sayısını tanımlamış olduk.

$$(n + m)_\mathbb{R} = n_\mathbb{R} + m_\mathbb{R},$$
$$(nm)_\mathbb{R} = n_\mathbb{R} m_\mathbb{R}$$

eşitlikleri kanıtlayın.

Üs Almak. Dikkat ederseniz gerçel sayılarda üs almayı tanımlamadık. Bir n tamsayısı ve bir x gerçel sayısı için x^n sayısını tanımlamak hiç zor değildir. Bir $x > 0$ gerçel sayısı ve bir q kesirli sayısı için x^q sayısı da biraz zahmetle de olsa oldukça rahat biçimde tanımlanabilir. Ama bir $x > 0$ ve y gerçel sayıları için x^y gerçel sayısını tanımlamak hiç kolay değildir. Bu tanım değişik biçimlerde yapılabilir (Cauchy dizileriyle, serilerle, ln fonksiyonunun tersi olarak). Bu konuya da geleceğiz. Ama analiz dersinde.