4*. Peano Aritmetiği

4.1. Hazırlık

P1, $\mathbb{N}$'nin altkümelerinden hiç sözetmeyen, $\mathbb{N}$'nin sadece elemanlarından sözeden ve sadece 0 ve S simgeleri kullanılarak yazılabilen bir önerme. Nitekim S'nin 0 değerini almayan birebir bir fonksiyon olduğu,

$$\forall x\ Sx \neq 0$$

ve

$$\forall x\ \forall y\ (Sx = Sy \rightarrow x = y)$$

önermeleriyle ifade edilebilir. (Bu önermelerde x ve y değişkenleri doğal sayılarda değer almalı. Yani "her x" ifadesi "her x doğal sayısı" olarak okunmalıdır.) Görüldüğü üzere, bu önermelerde $\forall$, =, $\rightarrow$, parantezler ve x ve y değişkenleri gibi mantıksal simgeler dışında sadece 0 ve S'yi kullandık. Örneğin hiç $\in$ simgesini kullanmadık.

Bundan böyle P1 yerine PA1 yazacağız. Şimdilik okura tuhaf gelebilecek değişikliğin nedeni bir iki sayfa sonra anlaşılacak.

Öte yandan P2, açıkça görüleceği üzere kümelerden ve altkümelerden sözeden bir özellik, ne de olsa doğal sayıların A altkümelerinin bir özelliğinden sözediyor. Daha doğrusu, P2, aritmetiğe yabancı olan, aritmetiğe değil de kümeler kuramına özgü olan $\in$ simgesini kullanıyor. Eğer önermelerimizde $\in$ simgesini kullanmayı bir sorun etmezsek, aslında P2 önermesini de sadece elemanlardan (ama doğal sayılardan değil de kümeler kuramının bir modelinin elemanlarından) sözeden bir önerme olarak yazabiliriz. Ama biz sadece aritmetiğin özü gibi görünen S ve 0 simgelerini kullanmak istiyoruz, aynen biraz önce P1 önermesi için yaptığımız gibi.

Zaten mantıkçılar da altkümelerden sözeden teorilerden pek hazzetmezler ve bunun için de burada açıklayamayacağımız haklı gerekçeleri vardır. Ayrıca aritmetiği keşfederken aritmetiğe tamamen yabancı bir simge ($\in$ simgesini) kullanmak pek şık değil. P2'yi altkümelerden ve $\in$ simgesiden sözetmeden yazabilir miyiz? Ya da P2'yi atıp yerine sadece elemanlardan sözeden ve mantıksal simgeler dışında sadece 0 ve S kullanan önermeler yazabilir miyiz?

Bu bölümde uzunca bir süre bu soruyla ilgileneceğiz. P2'yi yavaş yavaş değiştirip kabul edilebilir bir hale sokacağız. Ama ne yaparsak yapalım P2'ye eşdeğer bir sonuca ulaşamayacağımızı (Gödel'den) biliyoruz.

Önce Teorem 2.5'i anımsayalım ve bu teoremi PA2′ olarak yeniden adlandıralım.

PA2′. $\varphi(n)$, *n doğal sayısıyla ilgili bir önerme olsun. Eğer* $\varphi(0)$ *doğruysa ve her n doğal sayısı için*, $\varphi(n)$ *doğru olduğunda* $\varphi(Sn)$ *de doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için* $\varphi(n)$ *doğrudur. Bir başka deyişle,*

$$(\varphi(0) \wedge \forall n\ (\varphi(n) \rightarrow \varphi(Sn))) \rightarrow \forall n\ \varphi(n)$$

önermesi $\mathbb{N}$*'de doğrudur.*

PA2′ (yani Teorem 2.5) ile P2'nin birbirlerine denk olduklarını Bölüm 2'nin sonundaki Not 4'te gösterdik, ama formülü kümeler kuramının formülü almak koşuluyla, yani $\in$ simgesini formüllerde kullanmak koşuluyla. PA2′ önermesini yavaş yavaş kabul edilir bir biçime sokacağız. Amacımız $\in$ simgesini atıp daha aritmetiksel simgeler koymak ve gerekirse yeni aksiyomlar eklemek.

Birinci Dönüşüm. $\in$ simgesini ortadan kaldırıp, PA2′ önermesini sadece 0 ve *S* kullanan formüllere kısıtlarsak ne olur? PA2′ önermesinin bu yeni haline PA2″ adını verelim:

PA2″. $\varphi(n)$, *n doğal sayısıyla ilgili ve içinde mantıksal simgeler dışında sadece* 0 *ve S simgeleri kullanan bir önerme olsun. Eğer* $\varphi(0)$ *doğruysa ve her n doğal sayısı için*, $\varphi(n)$ *doğru olduğunda* $\varphi(Sn)$ *de doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için* $\varphi(n)$ *doğrudur. Bir başka deyişle,*

$$(\varphi(0) \wedge \forall n\ (\varphi(n) \rightarrow \varphi(Sn))) \rightarrow \forall n\ \varphi(n)$$

önermesi $\mathbb{N}$*'de doğrudur.*

PA2″ gene geçerli bir teoremdir, P2'nin (hatta PA2′ önermesinin) bir sonucudur hâlâ (elbette), ama artık P2'ye denk değildir, P2'den daha zayıf bir önermedir. Örneğin PA2″ önermesiyle Teorem 3.1'i kanıtlayamayız, yetersiz kalır. Bu imkânsızlığı bu ders notlarında kanıtlamamız mümkün değil[1]. (Dipnotlar bu sefer bölümün sonunda.)

İkinci Dönüşüm. PA1 ve PA2″ önermelerinden oluşan aksiyom sistemiyle Teorem 3.1'i yani toplamanın varlığını kanıtlayamayacağımıza göre Teorem 3.1'i aksiyomlarımıza ekleyelim, daha doğru bir ifadeyle, toplama diye bir fonksiyonun olduğunu ve aşağıdaki önermeyi sağladığını varsayalım.

PA3. *Her n*, *m için*

$$n + 0 = n,$$

ve

$$n + Sm = S(n + m).$$

Dilimize de artık 0 ve *S* dışında bir de + fonksiyon simgesini ekledik. Toplama aritmekle ilgili bir simge odluğundan, bunda bir beis görmüyoruz. PA2″ önermesini de şöyle genişletelim:

PA2‴. *$\varphi(n)$, n doğal sayısıyla ilgili ve içinde mantıksal simgeler dışında sadece 0, S ve + simgeleri kullanan bir önerme olsun. Eğer $\varphi(0)$ doğruysa ve her n doğal sayısı için, $\varphi(n)$ doğru olduğunda $\varphi(Sn)$ de doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n)$ doğrudur. Bir başka deyişle,*

$$(\varphi(0) \wedge \forall n\ (\varphi(n) \rightarrow \varphi(Sn))) \rightarrow \forall n\ \varphi(n)$$

önermesi $\mathbb{N}$'de doğrudur.

Şimdi elimizde PA1, PA2‴ ve PA3 önermelerinden oluşan bir aksiyom sistemi var. P1 ve P2 ile geçmişte kanıtladıklarımızı bu yeni aksiyom sistemiyle kanıtlayabilir miyiz? Bölüm 3.2'deki sonuçların tümünü, yani toplamanın tüm özelliklerini kanıtlayabiliriz. Okur bu dediğimizin doğruluğunu kendi kendine kontrol edebilir.

Ancak bu yeni aksiyom sistemiyle çarpmayı tanımlayamayız, yani Teorem 3.8'i kanıtlayamayız[2]. (Dipnotlar bölüm sonunda.)

Üçüncü Dönüşüm. PA1, PA2‴ ve PA3 nermelerinden oluşan aksiyom sistemiyle Teorem 3.8'i, yani çarpmanın varlığını kanıtlayamayacağımıza göre, Teorem 3.8'i aksiyomlarımıza ekleyelim, daha doğru bir ifadeyle çarpma diye bir fonksiyonun olduğunu ve bu fonksiyonun aşağıdaki önermeyi sağladığını varsayalım.

PA4. *Her $n, m \in \mathbb{N}$ için*

$$n \times 0 = 0$$

ve

$$n \times Sm = n \times m + n.$$

Dilimize artık 0, S ve + dışında bir de $\times$ fonksiyon simgesini ekledik. PA2‴ önermesini çarpmadan da sözedebilecek biçimde şöyle genişletelim:

PA2''''. $\varphi(n)$, *n doğal sayısıyla ilgili ve içinde mantıksal simgeler dışında sadece 0, S, + ve × simgeleri kullanan bir önerme olsun. Eğer* $\varphi(0)$ *doğruysa ve her n doğal sayısı için*, $\varphi(n)$ *doğru olduğunda* $\varphi(Sn)$ *de doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için* $\varphi(n)$ *doğrudur. Bir başka deyişle*,

$$(\varphi(0) \wedge \forall n\ (\varphi(n) \rightarrow \varphi(Sn))) \rightarrow \forall n\ \varphi(n)$$

önermesi $\mathbb{N}$*'de doğrudur.*

Şimdi elimizde PA1, PA2'''', PA3 ve PA4 önermelerinden oluşan bir aksiyom sistemi var. P1 ve P2 ile geçmişte kanıtladıklarımızı bu yeni aksiyom sistemiyle kanıtlayabilir miyiz? Sanki öyle gibi... Kanıtlayamadığımız her önerme için yeni bir simge ve o simgeyle ilgili bir aksiyom kabul ettik ve böylece sanki hiç başka aksiyoma ihtiyacımız kalmadı gibi.

Bölüm 3.4'deki sonuçların tümünü, yani çarpmanın tüm özelliklerini kanıtlayabiliriz.

Eşitsizliği de aynen Bölüm 3.5'te tanımlandığı gibi tanımlayabiliriz:

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists z\ x + z = y.$$

Teorem 3.21 dışında, Bölüm 3.5'teki eşitsizlikle ilgili her şey de kanıtlanır.

Bunların kanıtını okura bırakıyoruz. Zaten kanıtlar da değişmiyor.

Bölüm 3.6'daki İyisıralama Teoremi (Teorem 3.22) kanıtlanamaz ama; kanıtlanamaz çünkü her şeyden önce bu teoremin dili bizim dilimize müsait değil, ne de olsa rastgele altkümelerden sözediyor. Öte yandan her altkümeyi değil de münasip formüllerle tanımlanmış altkümeleri alırsak o zaman o teorem de doğru olur. Ya da şöyle ifade edelim: Teorem 3.22 olmasa da Sonuç 3.23 münasip (yani mantıksal simgeler dışında 0, S, + ve × simgeleriyle yazılmış) φ formülleri için geçerlidir.

Sonuncu Dönüşüm. Daha fazla ileri gitmeden PA2'''' önermesinin en genel halini yazalım. Bu yeni haliyle formüllerimizde parametreler de kullanabileceğiz; her ne kadar bu ders notlarında buna hiç ihtiyacımız olmayacaksa da.

PA2. $\varphi(x, y_1, ..., y_k)$, *mantıksal simgeler dışında sadece*
$0, S, +$ *ve* $\times$
kullanılarak yazılmış bir formül olsun. Ayrıca $m_1, ..., m_k \in \mathbb{N}$ *olsun. Simge sayısından tasarruf etmek için* $y_1, ..., y_k$ *yerine* $\overline{y}$, $m_1, ..., m_k$ *yerine* $\overline{m}$ *yazalım,*

Eğer $\varphi(0, \overline{m})$ *doğruysa ve her n doğal sayısı için,* $\varphi(n, \overline{m})$ *doğru olduğunda* $\varphi(Sn, \overline{m})$ *de doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için* $\varphi(n, \overline{m})$ *doğrudur. Bir başka deyişle,*

$$\forall \overline{y}\ ((\varphi(0, \overline{y}) \wedge \forall n\ (\varphi(n, \overline{y}) \to \varphi(Sn, \overline{y}))) \to \forall n\ \varphi(n, \overline{y}))$$

önermesi $\mathbb{N}$*'de doğrudur.*

PA2 doğrudur ve kanıtı da aynen Teorem 2.5'in kanıtı gibidir elbette (ve P2'yi kullanır).

PA2 aslında tek bir önerme değildir, bir önerme ailesi ya da daha yaygın bir kullanımla bir önerme şemasıdır. Bunu açıklayalım: PA2 yerine, mantıksal simgeler dışında sadece 0, S, $+$ *ve* $\times$ simgeleri kullanılarak yazılan her $\varphi(x, \overline{y})$ formülü için şu $PA2_\varphi$ önermesini ele alalım:

$PA2_\varphi$. *Eğer* $\varphi(0, \overline{y})$ *doğruysa ve her n doğal sayısı için* $\varphi(n, \overline{y})$ *doğru olduğunda* $\varphi(Sn, \overline{y})$ *de doğru oluyorsa, o zaman her n doğal sayısı için* $\varphi(n, \overline{y})$ *doğrudur.*

$PA2_\varphi$, simgesel olarak

$$\forall \overline{y}\ ((\varphi(0, \overline{y}) \wedge \forall n\ (\varphi(n, \overline{y}) \to \varphi(Sn, \overline{y}))) \to \forall n\ \varphi(n, \overline{y}))$$

biçiminde yazılır.

PA2, aslında bütün bu $PA2_\varphi$ formüllerinden oluşan bir ***aksiyom şemasıdır***, yani PA2 tek bir önerme değil, bir önerme ailesidir.

4.2. Peano Aritmetiği

Bu uzun tartışmadan sonra Peano Aritmetiği'nin doğal sayılar yapısını açıklayalım.

Peano aritmetiğinin doğal sayılar yapısı (ya da Peano Aritmetiği'nin bir modeli), biraz aşağıdaki PA1, PA2, PA3 ve PA4 önermelerini (***Peano Aksiyomları***'nı) sağlayan,

- Bir $\mathbb{N}$ kümesinden,
- Bir $0 \in \mathbb{N}$ elemanından,
- Bir $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonundan,
- Bir $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonundan,
- Bir $\times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonundan

oluşur. Bütün bunların sağlamaları gereken aksiyomlar şunlardır:

PA1. *S, hiç 0 değeri almayan birebir bir fonksiyondur.*

PA2. *Eğer $\varphi(x, \overline{y})$ formülü, mantıksal simgeler dışında*

$$0, S, +, \times$$

kullanılarak yazılmış bir formülse ve $a_1, ..., a_k \in \mathbb{N}$ için,

(i) *$\varphi(0, \overline{a})$ doğruysa, ve*

(ii) *Her n doğal sayısı için,*

$\varphi(n, \overline{a})$ doğru olduğunda $\varphi(Sn, \overline{a})$ de doğruysa,

o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n, \overline{a})$ doğrudur.

PA3. *Her $n, m \in \mathbb{N}$ için*

$$n + 0 = n,$$

ve

$$n + Sm = S(n + m).$$

PA4. *Her $n, m \in \mathbb{N}$ için*

$$n \times 0 = 0$$

ve

$$n \times Sm = n \times m + n.$$

Yukardaki PA1, PA2, PA3, PA4 aksiyom sistemini PA olarak kısaltalım. Bu arada PA2'nin sonsuz tane aksiyomdan oluştuğunabir kez daha dikkatinizi çekeriz.

Bu ders notlarında - açıkça belirteceğimiz bir iki istisna dışında, ama ikinci kısım ve sonrasında istisnasız olarak - hep yukarda sıraladığımız Peano Aksiyomları'nı kullanacağız, yani ders notlarının ta en başında inşa ettiğimiz güçlü yapının tüm gücünü kullanmayacağız. Bu da şu demektir: $(\mathbb{N}, 0, S, +, \times)$ beşlisi, PA aksiyomlarını sağlayan tanımsız nesneler beşlisi olarak varlığı sorgulanmadan kabul edilecek. (Yani tüm kümeler kuramını unutabilirsiniz!)

Bölüm 3'teki Teorem 3.1 ve 3.8 şimdi artık aksiyomlarımızın bir parçası, kanıtlanmalarına gerek yok. Geçmişte Bölüm 3.6'ya kadar kanıtladığımız birçok sonuç PA aksiyom sisteminde de kanıtlanabilir. İşte bu sonuçların bir listesi:

Teorem 4.2. *Her* $n, m, p \in \mathbb{N}$ *için,*
i [Değişme Özelliği]. $n + m = m + n$.
ii [Birleşme Özelliği]. $(n + m) + p = n + (m + p)$.
iii [Sadeleşme]. *Eğer* $n + m = n + p$ *ise* $m = p$ *olur.*
iv [Etkisiz Eleman]. $1 \times m = m = m \times 1$.
v [Değişme Özelliği]. *Her* $n, m \in \mathbb{N}$ *için,*

$$n \times m = m \times n.$$

vi [Birleşme Özelliği]. *Her* $n, m, p \in \mathbb{N}$ *için,*

$$(n \times m) \times p = m \times (n \times p).$$

vii [Dağılma Özelliği]. $n \times (m + p) = n \times m + n \times p$.
viii [Sıfırçarpansızlık]. $nm = 0$ *ise ya* n *ya da* $m = 0$ *olur.*
ix [Sıralama]. $\leq$ *ilişkisi bir tamsıralamadır, yani*

- **ix.i.** $n \leq n$.
- **ix.ii.** $n \leq m$ *ve* $m \leq n$ *ise* $n = m$.
- **ix.iii.** $n \leq m$ *ve* $m \leq p$ *ise* $n \leq p$.
- **ix.iv.** *Ya* $n \leq m$ *ya da* $m \leq n$ *olur.*

x. $n < m$ *ancak ve ancak* $n + p < m + p$ *ise.*
xi. *Eğer* $n < m$ *ve* $0 < p$ ise, *o zaman* $n \times p < m \times p$.
xi. *Eğer mantıksal simgeler dışında* $0, S, +, \times$ *kullanılarak yazılmış bir önerme bir doğal sayı için yanlışsa, o zaman* φ*'nin yanlış olduğu en küçük bir doğal sayı vardır.*

Bütün bu sonuçların gerçekten Peano Aritmetiği'nin bir sonucu olduğunu kontrol etmeyi okura bırakıyoruz.

Ama çeşitli nedenlerden Teorem 3.22'yi PA sisteminde kanıtlayamayız. Öte yandan Teorem 3.25 kanıtlanabilir:

Teorem 4.3 [Teorem 3.25, Tümevarımla Kanıt II]. $\varphi(n)$ *doğal sayılar hakkında bir önerme olsun. Eğer her n doğal sayısı için,*

$$\varphi(0), \ldots, \varphi(n-1)$$

önermeleri doğru olduğunda

$$\varphi(n)$$

önermesi de doğruysa, o zaman $\varphi(n)$ *her n için doğrudur. Daha matematiksel bir deyişle, eğer her n doğal sayısı için, n'den küçük her i doğal sayısı* φ*'yi doğruladığında n de* φ*'yi doğrulanıyorsa, o zaman herdoğal sayı* φ*'yi doğrular. Gene bir başka deyişle, eğer her n için,*

$$(\forall i\ (i < n \to \varphi(i))) \to \varphi(n)$$

önermesi doğruysa, o zaman her n için $\varphi(n)$ *doğrudur.*

Kanıt: $\varphi(n)$'nin değillemesinin, yani $\neg\varphi(n)$ doğru olduğu bir doğal sayı olduğunu varsayalım. O zaman Teorem 4.2.xi'e göre (bkz. Sonuç 3.23), $\neg\varphi(n)$'nin doğru olduğu en küçük bir doğal sayı vardır, diyelim n. O zaman n'den küçük her sayı için φ doğru. Ama o zaman da teoremin varsayımına göre $\varphi(n)$ doğrudur. Çelişki. Demek ki $\neg\varphi(n)$'nin doğru olduğu bir doğal sayı yoktır, yani $\neg\varphi(n)$ her doğal sayı için yanlıştır, yani $\varphi(n)$ her doğal sayı için doğrudur. □

Teorem 3.25'i kullanarak doğal sayılarda kalanlı bölmenin mümkün olduğunu, yani Teorem 3.26'yı PA'da kanıtlayabiliriz.

Teorem 4.4 [Teorem 3.26, Doğal Sayılarda Bölme]. *n ve m iki doğal sayı olsun, ama* $m \neq 0$ *olsun. O zaman öyle bir ve bir tane q ve r doğal sayı çifti vardır ki,* $n = mq + r$ *ve* $r < m$ *olur.*

4.3. Üs Alma ve Diğer Fonksiyonlar

Yukardaki teoremlere bakacak olursak, PA'nın toplamanın ve çarpanın özü barındırdığına aşağı yukarı emin olabiliriz. Peki ya üs alma ya da faktoriyel fonksiyonları? Bu fonksiyonlar PA2'da tanımlanabilirler mi?

Örneğin toplama ve çarpmayı kullanarak 1'den n'ye kadar olan sayıların ekok'unu tanımlamak o kadar zor değil. Okur bunu bu aşamada bir çırpıda yapabilir. Ama $n!$ fonksiyonunu tanımlamak mümkün müdür?

Toplamanın 0 ve S simgelerini ve PA1 ve PA2 aksiyomlarını kullanarak tanımlanamadığını söyledik ve bu sorunu gidermek için dilimize, 0 ve S dışında + diye bir fonksiyon simgesi ekledik ve buna ilaveten bir de PA3 aksiyomunu kabul ettik.

Çarpmanın da 0, S ve + simgelerini ve PA1, PA2 ve PA3 aksiyomlarını kullanarak tanımlanamadığını söyledik ve bu sorunu gidermek için dilimize $\times$ diye bir fonksiyon simgesi daha ekledik ve PA4 aksiyomunu kabul ettik.

Toplama ve çarpmadan sonra akla ilk gelen bir sonraki aşamaya geçelim: $(n, m) \to n^m$ formülüyle "tanımlanan" (hepimizin bildiği üs alma) fonksiyonunun varlığı, 0, S, + ve $\times$ simgelerini ve PA1, PA2, PA3 ve PA4 aksiyomlarını kullanarak tanımlayabilir miyiz? Önceki iki paragrafa bakarak üs alma fonksiyonun PA'da tanımlanamadığını düşünmek doğaldır. Ama öyle değil. Üs alma fonksiyonu bu simgeler ve aksiyomlarla tanımlanabiliyor. Hatta faktoriyel ve n-inci asal fonksiyonlarına tanımlanabilir. Tüm doğal fonksiyonlar PA'da tanımlanabilir. Bu dediklerimizin doğruluğunu ne yazık ki Teorem 3A'in bir benzerini PA için kanıtlayarak gösteremeyiz, çünkü (bildiğim kadarıyla), $X = Y = \mathbb{N}$ alınsa bile bu teoremin PA'da bir karşılığı yok. Kanıt için bambaşka bir yöntem gerekiyor.

Genel yöntemden bir başka yerde sözedebiliriz. Meraklı okur [Po] kitabının Bölüm 7d'sine bakabilir. Şimdilik sadece üs almanın nasıl tanımlandığını görelim:

$r(u, v)$ sayısı, u sayısı $v + 1$'e bölündüğünde kalan olsun. PA'da kolaylıkla

$$r(u, v) = x$$

anlamına gelebilecek bir formül yazabiliriz. (Okura alıştırma.) Şimdi şu $\varphi(n, m, p)$ formülüne bakalım:

$$\exists u\ \exists v\ (r(u, v) = 1 \wedge r(u, (m+1)v) = p$$
$$\wedge\ \forall i\ (1 \le i \le m \to r(u, (i+1)v) = r(u, iv)n).$$

Bu formül ancak ve ancak $p = n^m$ ise doğrudur. Bunu görmek için, her $i = 0, 1, ..., m$ için,

$$a_i = r(u, (i+1)v)$$

tanımını yapalım. Bu tanımdan,

$$a_0 = 1$$

ve

$$a_{i+1} = a_i n$$

eşitlikleri çıkar. Demek ki,

$$a_i = n^i.$$

Ayrıntıları okura bırakıyoruz.

Dipnotlar:

1. Kanıtın fikri: Aksi halde toplama fonskiyonu 0 ve S'den hareketle tanımlanabilirdi, demek ki $\le$ de 0 ve S'den tanımlanabilirdi. Şimdi $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısının teorisinin nonstandart bir modelini alalım. Bu modeli (elbette $x < Sx$ önermesi doğru olacak biçimde) iki değişik biçimde sıralayacağız ve elde ettiğimiz yapılar $(\mathbb{N}, 0, S, <)$ ya da $(\mathbb{N}, 0, <)$ yapısının teorisinin modeli olacak. $\mathbb{N}$'ye benzemek zorunda olan standart kısmı bildiğimiz gibi sıralayalım, $x < Sx$ önermesi doğru olmak zorunda olduğundan başka bir seçeneğimiz de yok zaten. Nonstandart kısımlar $\mathbb{Z}$'nin kopyalarına benzerler. $\mathbb{Z}$'nin en az 2 kopyasının olduğunu varsayalım ve her kopyayı kendi içinde bildiğimiz gibi sıralayalım. Diyelim $\mathbb{Z}$'nin $\mathbb{Z}_1$ ve $\mathbb{Z}_2$ adını verdiğimiz sadece iki kopyası var. Şimdi modeli $\mathbb{N} < \mathbb{Z}_1 < \mathbb{Z}_2$ ya da $\mathbb{N} < \mathbb{Z}_2 < \mathbb{Z}_1$ olmak üzere iki değişik biçimde sıralayabiliriz. Ama $\mathbb{Z}_1$ ile $\mathbb{Z}_2$'nin yerlerini değiştiren tahmin edilen fonksiyon S'ye saygı duyar ama sıralamaya saygı duymaz. Demek ki sıralama S'den ve 0'dan hareketle tanımlanamaz.

2. Kanıtın fikri: Presburger'ın bir teoremine göre bu aksiyom sistemiyle, doğru olan her önerme kanıtlanabilir, üstelik bir bilgisayar programı yardımıyla kanıtlanabilir, öte yandan Gödel'in ikinci eksiklik teoremine göre toplama ve çarpmayla ilgili doğal sayılarda doğru ama bu aksiyomlarla (hatta daha fazlasıyla da) kanıtlanamayan bir önerme vardır. Demek ki çarpma işlemi, 0, S ve + yardımıyla tanımlanamaz.

Diğer (Arife) Notlar

3. Bölüm 2 ve 3'te ZF kümeler kuramından hareketle PA'nın bir modelini (yani PA aksiyomlarının geçerli olduğu bir (N, 0, S, +, x) yapısı bulduğumuza göre, ZF kümeler kuramının PA'da çelişki olmadığını kanıtlamış olduk. Yani mantığın diliyle

$$\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Con(PA)}.$$

Gödel'e göre PA kendisinin çelişkisiz olduğunu kanıtlayamaz ama. Böylece ZF'nin PA'dan daha güçlü olduğu anlaşılmış oldu.

4. P1 ve P2'yi sağlayan bir yapı çok güçlü bir anlamda biricikken (yani P1 ve P2'nin herhangi iki modeli birbirine izomorf iken, bkz Bölüm 3B), aynı şey Peano Aksiyomları'nı sağlayan modeller için doğru değildir. Bunun nedeni PA'nın sadece elemanlardan sözetmesidir. Lowenheim-Skolem Teoremi olarak bilinen bir teoreme göre PA'yı sağlayan her kardinalitede model olduğu gibi, aynı kardinalitede ama izomorf olmayan modeller de vardır. Yani PA aksiyomları doğal sayılar kümesini tek bir biçimde belirleyemezler.

4A*. Formül Nedir?

Bölüm 1'de Tanımlı Altküme Aksiyomu'nu açıklarken ne olduğunu söylemeden "kümeler kuramının dilinde yazılmış formül"den sözettik. Geçen bölümde "0 ve S kullanılarak yazılmış bir değişkenli formül"lerden sözettik. Bu bölümde kısaca formülün ne demek olduğunu açıklamaya çalışacağız.

Önce matematiksel tümcenin tanımını verelim. Her dilde olduğu gibi matematikçede de bir tümce yazmak için önce bir alfabeye ihtiyaç vardır. Matematikçenin temel alfabesi şu simgelerden oluşur:

$$\exists,\ \wedge,\ \neg,\ (,\ ),\ =,\ \in,\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots$$

Kullanılan diğer $\forall$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ gibi simgeler yukardakilerin yardımıyla tanımlanabilirler, dolayısıyla onları alfabeye eklemenin gereği yoktur.

v_0, v_1, v_2, ... simgelerine (harflerine) ***değişken*** adı verilir.

Her ne kadar v_0, v_1, v_2, ... değişken simgeleri yüzünden alfabemiz sonsuz gibi görünse de, bu aldatıcıdır. Değişkenleri sadece v ve | simgeleriyle elde edebiliriz:

v_0 yerine v yazalım,
v_1 yerine $v|$ yazalım,
v_2 yerine $v||$ yazalım, ...

Bu temel alfabe dışında her matematiksel teorinin kendine özgü simgeleri vardır.

Kümeler kuramının kendine özgü tek bir simgesi vardır: $\in$.

Peano Aritmetiği'nin kendine özgü dört simgesi vardır: 0, S, + ve ×.

Biraz soyut matematik görmüşler için başka örnekler verebiliriz:

Halkalar kuramının simgeleri 0, 1, + ve × dır. Sıralı halkalar kuramının simgeleri 0, 1, +, × ve ≤ simgeleridir.

Ama biz sadece kümeler kuramı ve Peano Aritmetiği'yle ilgileneceğiz.

Böylece, sadece $\exists$, $\wedge$, $\neg$, (,), =, $\in$, v, | simgeleriyle tüm matematiksel tümceleri yazabiliriz.

Kümeler Kuramı'nın Formülleri

Formülün tanımı basitten karmaşığa doğru verilir. Önce, adına "atomik" denen en basit formülleri tanımlayacağız (ilk iki tanım), sonra atomik formüllerin yardımıyla elde edilen daha karmaşık formülleri:

1) Her i ve j için, $v_i = v_j$ bir formüldür.

2) Her i ve j için, $v_i \in v_j$ bir formüldür.

3) Eğer φ matematiksel bir formülse, $\neg(\varphi)$ de bir formüldür.

4) Eğer φ ve ψ formüllerse, $(\varphi) \wedge (\psi)$ de bir formüldür.

5) Eğer φ bir formülse, her i doğal sayısı için, $\exists v_i\ (\varphi)$ de bir formüldür.

Yukarda tanımlanan formülker şimdilik birtakım harflerden oluşan anlamsız birer dizidir. Bu anlamsız formüllere şu anlamları yükleriz:

1) $v_i = v_j$ formülü elbette "v_i, v_j'ye eşittir" olarak yorumlanır.

2) $v_i \in v_j$ formülü "v_i, v_j'nin bir elemanıdır" olarak yorumlanır.

3) $\neg(\varphi)$ formülü "φ doğru değil" olarak yorumlanır.

4) $(\varphi) \wedge (\psi)$ formülü "hem φ hem ψ doğru" olarak yorumlanır.

5) $\exists v_i\ \varphi$ formülü "φ'yi doğrulayan en az bir v_i var" olarak yorumlanır.

Yukardaki simgelerle yazılan formüller çok karmaşık olabileceklerinden bazı kısaltmalar yapılır. Birkaç örnek verelim:

1) Gereksiz olduğu düşünülen parantezler yazılmaz. Bundan böyle biz de yazmayacağız.

2) v'ler yerine genelde x, y, z gibi simgeler yeğlenir.

3) $\varphi \vee \psi$ formülü $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ formülünün kısaltılmışıdır ve elbette "φ ya da ψ'den en az biri doğru" (ikisi birden de doğru olabilir) olarak yorumlanmalıdır.

4) $\varphi \to \psi$ formülü $\neg\varphi \vee \psi$ formülünün kısaltılmışıdır ve elbette "eğer φ doğruysa ψ de doğrudur" olarak yorumlanmalıdır.

5) $\varphi \leftrightarrow \psi$ formülü $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ formülünün kısaltılmışıdır ve elbette "eğer φ'nin doğru olması için gerek ve yeter koşul ψ'nin doğru olmasıdır" olarak yorumlanmalıdır.

6) $\forall x\ \varphi$ formülü $\neg(\exists x\ \neg\varphi)$ formülünün kısaltılmışıdır ve elbette "her x için φ doğrudur" olarak yorumlanmalıdır.

7) $\neg(x = y)$ formülü yerine $x \neq y$ yazılır.

8) $\neg(x \in y)$ formülü yerine $x \notin y$ yazılır.

9) $\exists! v\ \varphi$ formülü "φ'yi doğrulayan bir ve bir tek v var" olarak yorumlanır. Yani

$\exists v\ (\varphi(v)$ ve $\forall w\ (\varphi(w) \to v = w))$

Bir değişkenli formül, $\exists$ (ya da $\forall$) simgesinin kapsamına girmemiş bir değişken barındıran matematiksel bir tümcedir. Formüle "özellik" de diyebiliriz. Örneğin, "en az bir elemanı var" yani "boşküme değil" özelliği (ya da formülü) şöyle ifade edilir:

$$\exists y\ y \in x.$$

(Bu özellik $x \neq \emptyset$ olarak kısaltılır.)

Örneğin "x'in sadece bir elemanı var" özelliği şöyle ifade edilir:

$$\exists y\ (y \in x \wedge \forall z\ (z \in x \to z = y)).$$

(Bu özellik $\exists y\ x = \{y\}$ olarak da kısaltılabilir.)

"Boşküme x'in elemanıdır" özelliği şöyle ifade edilir:

$$\exists y\ (y \in x \wedge \forall z\ z \notin y).$$

(Bu da $\varnothing \in x$ olarak kısaltılır.)

Yukardaki üç özellik de x değişkeninin özelliğidir. Bu özelliklerin x'le ilgili olduğunu iyice belirtmek için φ yerine $\varphi(x)$ yazmak kolaylık sağlar.

Matematiksel olarak ifade edilen her önerme yukardaki alfabeyle yukardaki kurallara uyularak yazılabilir. Örneğin

"x bir doğal sayıdır ve çifttir"

böyle bir özelliktir (okura alıştırma).

Peano Aritmetiği'nin Formülleri

Tanım nerdeyse aynı ama Peano Aritmetiği'nin terimlerini ayrıca tanımlamamız gerekiyor.

1) Her v_i bir terimdir.

2) 0 bir terimdir.

3) Eğer t ve s birer terimse St, $t + s$ ve ts de birer terimdir.

Görüldüğü üzere terimler polinomlara benzeyen ifadeler.

Şimdi Peano Aritmetiği'nin formüllerini tanımlayabiliriz:

1) Eğer t ve s birer terimse, $t = s$ bir formüldür.

2) Eğer φ bir formülse, $\neg(\varphi)$ de matematiksel bir formüldür.

3) Eğer φ ve ψ formüllerse, $(\varphi) \wedge (\psi)$ de bir formüldür.

4) Eğer φ bir formülse, her i doğal sayısı için, $\exists v_i\ (\varphi)$ de bir formüldür.

Bir önceki paragrafta tanımlanan kısaltmalar burada da yapılabilir.

Böylece örneğin asal sayılar kümesinin bir formülle tanımlandığını görmek kolaylaşır: Bir p sayısının asal olması için, p sayısının

$$p \neq 1 \wedge \forall x\ \forall y\ (p = xy \rightarrow (x = 1 \vee y = 1))$$

formülünü sağlaması yeter ve gerek koşuldur.