Bölüm 22

SEÇME AKSİYOMU

SEÇME AKSİYOMU VE EŞDEĞERLERİ

22.1 GİRİŞ

Bir X kümesi düşünelim. Bu küme ya boştur ya değildir. Değilse, X kümesine ait bir öğe seçilebilir. Şimdi başka bir Y kümesi daha düşünelim. X ile Y nin kartezyen çarpımını $X \times Y$ ile göstermiştik. Eğer X ile Y den birisi ya da ikisi de boşsa $X \times Y$ de boş olacaktır. Eğer her ikisi de boş değilse, bir $x \in X$ ve bir $y \in Y$ vardır ve bu iki öğenin oluşturduğu (x, y) sıralı çifti $X \times Y$ kartezyen çarpımına aittir; dolayısıyla bu kartezyen çarpım boş küme değildir. Bu düşünüşle, giderek, sonlu sayıda bir kümeler ailesinin kartezyen çarpımının boş olması için, bu kümelerden en az birisinin boş olmasının gerekli ve yeterli olduğunu söyleyebiliriz. Bunu başka türlü söylersek, *"Sonlu sayıda boş olmayan kümelerin kartezyen çarpımı boş değildir"* diyebiliriz. Gerçekten, bunu *sonlu tüme varım yöntemiyle* kolayca gösterebiliriz.

Acaba ilk bakışta pek doğal görünen bu özeliği, *sonsuz sayıda kümeler ailesi* için de söyleyebilir miyiz? *Cebir, analiz, topoloji* gibi alanlarda önemli bir araç olarak kullanılan bu özelik ve buna eşdeğer olan başka özeliklerin varlığı ispatlanamadı. Bunun üzerine, 1900 yıllarında Alman matematikçi *Ernst Zermelo* bu özeliğin bir aksiyom olarak kabul edilmesini önerdi. *"Seçme Aksiyomu"* diye adlandırılan bu özeliği şöyle ifade edebiliriz:

Teorem 22.1.1. *[Seçme Aksiyomu] Boş olmayan kümelerden oluşan boş olmayan bir ailenin kartezyen çarpımı boş değildir.*

Bunu daha iyi açıklamak için herhangi bir $\{A_\imath : \imath \in I\}$ ailesinin kartezyen çarpımını anımsayalım: $\Pi_{\imath \in I} A_\imath$ ile gösterdiğimiz bu çarpım, her $\imath \in I$ için $f(i) \in A_\imath$ koşulunu sağlayan bütün

$$f : I \to \bigcup_{\imath \in I} A_\imath \tag{22.1}$$

fonksiyonlarının oluşturduğu küme idi. Bu f fonksiyonlarından herbirisine bir *seçme fonksiyonu* denilir. Kartezyen çarpımın boş olmaması demek, en az bir seçme fonksiyonu var demektir (bkz. (22.1))

Hemen belirtelim ki *Seçme Aksiyomu*, yukarıdakine denk olan değişik başka biçimlerde de ifade edilebilir. Biraz sonra onları göreceğiz.

22.2 SEÇME AKSİYOMU BAĞIMSIZDIR

Seçme Aksiyomu matematikte önemli uygulamaları olan bir varsayımdır. Bu bakımdan, matematikçilere büyük bir çalışma konusu olmuştur. Burada, *Seçme Aksiyomu* için de, *Sürey Hipotezi* için elde edilen sonuçların benzerlerinin varlığını söylemekle yetineceğiz. Bu sonuçlar, yine, *Kurt Gödel* (1940) ve *Paul Cohen* (1965) tarafından verilmiştir. Kısaca özetlersek, *Gödel*, Kümeler Kuramının aksiyomlarına Seçme Aksiyomu eklendiğinde sistemde bir çelişki doğmadığını; yani, Kümeler Kuramının öteki aksiyomlarıyla birlikte Seçme Aksiyomunun *çelişmez bir sistem* oluşturduğunu gösterdi. *Cohen* ise, Seçme Aksiyomunun, Kümeler Kuramının öteki aksiyomlarından *bağımsız* olduğunu gösterdi. Buna göre, Seçme Aksiyomunu varsayan bir Kümeler Kuramı kurulabildiği gibi, bu aksiyomu varsaymayan bir *Kümeler Kuramı* da kurulabilir. Her iki sistem kendi içlerinde tutarlıdır (çelişmez), ama birbirlerinden farklı sistemler olurlar. [10]

22.3 SABİT NOKTA TEOREMİ

Tanım 22.3.1. Tikel sıralı bir kümenin tümel sıralı her alt kümesi bir zincirdir.

Özel olarak, tümel sıralı her küme bir zincirdir.

Tanım 22.3.2. $(E, \preceq)$ tikel sıralanmış sistem ve $a \in E$ olsun. E nin aşağıdaki üç özeliğe sahip bir B alt kümesine *içeren* bir küme diyeceğiz:

(i) $a \in B$

(ii) $f(B) \subset B$

(iii) B içindeki her zincirin en küçük üst sınırı yine B ye aittir.

Teorem 22.3.1. *$(E, \preceq)$ tikel sıralanmış sistemi içindeki her zincirin bir üst sınırı var olsun. Eğer $f : E \to E$ azalmayan bir fonksiyon ise, f fonksiyonu altında sabit kalan bir $w \in E$ öğesi vardır.*

İSPAT:

$$x \in E \Rightarrow x \le f(x) \tag{22.2}$$

ise

$$(\exists w \in E)\, f(w) = w \tag{22.3}$$

olduğunu göstermeliyiz.

Bir $a \in E$ öğesi seçelim. Bu ispat boyunca seçtiğimiz bu a öğesi sabit kalacaktır. E nin bütün içeren alt kümelerinden oluşan aileye $\mathscr{B}$ diyelim. E kümesinin *içeren* bir küme olduğu apaçıktır; yani $\mathscr{B}$ ailesi boş değildir. Kolayca görüleceği üzere içeren kümelerin arakesiti de içeren bir kümedir; öyleyse,

$$A = \cap\mathscr{B} = \cap\{B : B \in \mathscr{B}\} \tag{22.4}$$

arakesiti, en küçük içeren kümedir. Şimdi

$$\mathcal{A} = \{x \in E \,|\, a \preceq x\} \tag{22.5}$$

kümesini düşünelim. Bunun içeren bir küme olduğunu göstereceğiz, $a \in \mathcal{A}$ olduğu apaçıktır; yani $\mathcal{A}$ kümesi (i) koşulunu sağlar.

$\mathcal{A}$ kümesinin ve f fonksiyonunun tanımından, her $x \in \mathcal{A}$ için $a \preceq x \preceq f(x) \in E$ çıkar. Öyleyse $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ olur; yani (ii) koşulu sağlanır.

Son olarak, $\mathcal{A}$ içinde herhangi bir Z zinciri alalım. Z nin en küçük üst sınırı t olsun. Eğer $t \notin \mathcal{A}$ olsaydı, $\mathcal{A}$ nın tanımı gereğince, $t \prec a$ olurdu. Öte yandan, her $r \in Z$ için $r \preceq t$ dir. Şu halde, her $r \in Z$ için $r \preceq t \prec a$ olacaktır, ki bu, $\mathcal{A}$ kümesi Z yi kapsamaz, demektir. Bu çelişki kabulümüzden geldiğine göre, $t \in \mathcal{A}$ olmalıdır; yani (iii) koşulu da sağlanır.

Böylece $\mathcal{A}$ nın içeren bir küme olduğu görülüyor. Ohalde, en küçük içeren kümeyi kapsar; yani $A \subset \mathcal{A}$ dır. Buradan

(iv) $x \in A \Rightarrow a \preceq x$

olduğu çıkar. Şimdi de bir P kümesini şöyle tanımlayalım:

$$P = \{x \in A \,|\, (y \in A \wedge y \preceq x) \Rightarrow f(y) \preceq x\} \tag{22.6}$$

Bu kümenin boş olmadığım görmek için, örneğin,

$$a \in P \tag{22.7}$$

olduğunu hemen gösterebiliriz. Gerçekten, (iv) gereğince, hiçbir $y \in A$ için $y \prec a$ olamayacağından, (22.6) tanımındaki önerme doğru olur.

Buradan hemen görüleceği üzere, a öğesi, P nin en küçük öğesidir. Şimdi P içinde sabit bir p öğesi seçelim ve buna bağlı olan bir M_p kümesini şöyle tanımlayalım:

$$M_p = \{m \in A \,|\, m \preceq p \vee f(p) \preceq m\} \tag{22.8}$$

Teoremin ispatını aşağıdaki beş adımda tamamlayabileceğiz.

1.Adım: M_p içeren bir kümedir.

> a öğesi, P nin en küçük öğesi olduğundan, $a \preceq p$ dir. Öyleyse, (22.8) den, $a \in M_p$ olur. Demek ki M_p kümesi (i) koşulunu sağlıyor.
>
> Şimdi M_p nin (ii) koşulunu sağladığını gösterelim. Herhangi bir $m \in M_p$ seçelim. Üç durum vardır:

1.Durum: Eğer $f(p) \preceq m$ ise, (22.2) den, $f(p) \preceq m \preceq f(m)$ olur, ki bu (22.8) gereğince $f(m) \in M_p$ olması demektir.

2.Durum: $m = p$ ise $f(m) = f(p)$ olur. Oysa $p \in M_p$ ve $f(p) \in M_p$ olduğu (22.8) den hemen görülür.

3.Durum: $m \prec p$ ise, $p \in P$ olduğundan, (22.6) gereğince, $f(m) \preceq p$ olacaktır, ki bu (22.8) den $f(m) \in M_p$ olması demektir.

Böylece $f(M_p) \subset M_p$ çıkar.

Şimdi de $p \in M_p$ nin (iii) koşulunu sağladığını gösterelim. N kümesi, M_p içinde herhangi bir zincir ve N nin en küçük üst sınırı u olsun. $N \subset M_p$ olduğundan, (22.8) gereğince, iki durum düşünülebilir:

Ya her $y \in N$ için $y \preceq p$ dir ya da $f(p) \preceq y$ koşulunu sağlayan bazı $y \in N$ öğeleri vardır. Birinci durum varsa, p, N kümesinin bir üst sınırıdır; dolayısıyla, p, N nin en küçük üst sınırından küçük olamaz; yani $u \preceq p$ dir. Bu durumda, (22.8) gereğince, $u \in M_p$ olur. İkinci durum varsa; yani bazı (belki de her) $y \in N$ için $f(p) \preceq y$ koşulu sağlanıyorsa, $y \preceq u$ olduğundan, yine $f(p) \preceq u$ olacaktır. Bu durumda da, (22.8) gereğince, $u \in M_p$ olur.

Böylece M_p nin *içeren* bir küme olduğunu göstermiş oluyoruz.

2.Adım: $M_p = A$ dır.

1.Adımdan $M_p \in \mathscr{B}$ çıkar. Ohalde (22.4) gereğince $M_p \supset A$ olacaktır. Oysa (22.8) den, $M_p \subset A$ olarak tanımlanmıştır. Demek ki $M_p = A$ dır. Bu eşitlikten şu özeliği yazabiliriz:

(v) $(x \in P \vee z \in A) \Rightarrow (z \preceq x \vee f(x) \preceq z)$

3.Adım: $P = A$ dır.

$a \in P$ olduğunu (22.7) den biliyoruz; yani P kümesi (i) koşulunu sağlar. Şimdi P nin (ii) koşulunu sağladığını gösterelim. Herhangi bir $x \in P$ verilsin, $f(x) \in P$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için, (22.6)) gereğince,

$$(z \in A) \wedge (z \prec f(x)) \Rightarrow f(z) \preceq f(x) \tag{22.9}$$

olduğunu göstermeliyiz, (v) gereğince, $x \in P$ ve $z \in A$ varsayımımız ya $z \preceq x$ ya da $f(x) \preceq z$ olmasını gerektirir. Oysa ikinci durum $z \prec f(x)$ olduğu kabulümüze aykırıdır. Demek ki yalnızca $z \prec x$ durumu varolabilir. $x \in P$ olduğundan, eğer $z \preceq x$ ise, (22.6) ve (22.2) den $f(z) \preceq x \preceq f(x)$ olur. Eğer $z = x$ ise $f(z) = f(x)$ olur. Böylece $x \in P$ ise $f(x) \in P$ olduğu; yani $f(P) \subset P$ olduğu görülür.

Son olarak, P nin (iii) koşulunu sağladığını gösterelim. P içinde bir F zinciri verilsin. F nin en küçük üst sınırına v diyelim, $v \in P$ olduğunu göstermek için, (22.6) ya göre,

$$(z \in A \wedge z \prec v) \Rightarrow f(z) \preceq v \tag{22.10}$$

olduğunu göstermeliyiz, (v) den hemen görüleceği üzere, her $x \in F$ için ya $z \preceq x$ ya da $x \preceq f(x) \preceq z$ olacaktır. Eğer ikincisi sağlanıyor olsaydı $v \preceq z$ olurdu, ki bu kabulümüze aykırıdır. Ohalde her $x \in F$ için $z \preceq x$ olacaktır. Eğer $z \prec x$ ise $f(z) \preceq x \preceq v$ (P nin tanımından) olur. Eğer $z = x$ ise $z \neq v$ olduğundan, F içinde öyle bir y öğesi vardır ki $z \prec y$ olur; aksi halde F nin en küçük üst sınırı v değil z olmalı idi, ki bu olamaz. Ohalde $f(z) \preceq y \preceq v$ olacaktır. Demek ki her iki halde de (22.10) sağlanıyor; Öyleyse $v \in P$ dir.

Böylece P nin *içeren* bir küme olduğu gösterilmiş olmaktadır; dolayısıyla (22.4) den $P \supset A$ çıkar. Oysa (22.6) tanımından $P \subset A$ dır. Demek ki $P = A$ dır.

4.Adım: A kümesi E içinde bir zincirdir.

$A = P$ olduğunu düşünürsek (v) den her $x, z \in A$ için ya $z \preceq x$ ya da $x \preceq f(x) \preceq z$ çıkar; yani

$$x, z \in A \Rightarrow (z \preceq x) \vee (x \preceq z) \tag{22.11}$$

olur, ki bu, A nın E içinde tam sıralı bir alt küme olduğunu, dolayısıyla bir *zincir* olduğunu söyler.

5.Adım: A nın en küçük üst sınırı f nin sabit bir noktasıdır.

A mn en küçük üst sınırına w diyelim. A kümesi içeren olduğundan, $w \in A$ ve dolayısıyla $f(w) \in A$ dır. En küçük üst sınır tanımına göre $f(w) \preceq w$ olmak zorundadır. Oysa (22.2) den, $w \preceq f(w)$ dır. öyleyse $w = f(w)$ olacaktır.

22.4 SA ve EŞDEĞERLERİ

Matematiğin birçok probleminde doğrudan doğruya Seçme Aksiyomu (SA) kullanılmaz. Seçme Aksiyomu yerine ona eşdeğer olan bazı özelikler kullanılır. Gerçekte, Seçme Aksiyomunun eşdeğerleri pek çoktur. Ancak burada, çok sık kullanılan üç tanesini vermekle yetineceğiz.

Önerme 22.4.1. *Aşağıdaki önermeler birbirlerine eşdeğerdir.*

SA Seçme Aksiyomu: Boş olmayan kümelerden oluşan boş olmayan bir ailenin kartezyen çarpımı boş değildir.

HB Hausdorff Büyükçelik İlkesi: Boş olmayan tikel sıralanmış her küme içinde daima büyükçe (maksimal) bir zincir vardır.

ZT Zorn Teoremi: Boş olmayan ve her zinciri bir üst sınıra sahip olan tikel sıralanmış bir kümenin büyükçe bir öğesi vardır.

WO İyi Sıralama Teoremi: [Zermelo] Her küme iyi sıralanabilir.

İSPAT: Bu dört Önermenin birbirlerine denk olduğunu ispatlamak için şu sırayı izleyeceğiz:

$$[SA] \Rightarrow [HB] \Rightarrow [ZT] \Rightarrow [WO] \Rightarrow [SA]$$

SA ⇒ HB *Seçme Aksiyomunu* varsayarsak, göstereceğiz ki boş olmayan tikel sıralanmış her küme içinde *büyükçe bir zincir* vardır. Bunu biraz daha açıklayalım: $(L, \preceq)$ tikel sıralanmış bir küme olsun. L içindeki bütün zincirlerden oluşan aileye $\mathscr{L}$ diyelim; yani $\mathscr{L}$, L nin tümel (tam) sıralı bütün alt kümelerinin ailesi olsun. $\mathscr{L}$ ailesi kapsama bağıntısına göre tikel sıralıdır. Göstereceğiz ki $(\mathscr{L}, \subset)$ tikel sıralanmış sisteminin bir *büyükçe öğesi* vardır. İspatı *olmayana ergi* yöntemiyle yapacağız. $(\mathscr{L}, \subset)$ tikel sıralanmış sisteminin büyükçe bir öğesi var olmasın. Bu durumda her A öğesinden (kümesinden) daha büyük olan; yani $A \subset B$ olan, bir $B \in \mathscr{L}$ kümesi daima varolacaktır. Buna göre, her $A \in \mathscr{L}$ için

$$\mathscr{L}_A = \{B \in \mathscr{L} \mid A \nsubseteq B\} \tag{22.12}$$

ailesini tanımlayalım.

$$\emptyset \neq \mathscr{L}_A \subset \mathscr{L} \tag{22.13}$$

olacağı apaçıktır, öyleyse

$$\mathscr{A} = \{\mathscr{L}_A \mid A \in \mathscr{L}\} \tag{22.14}$$

ailesi boş olmayan $\mathscr{L}_A$ kümelerinden oluşan boş olmayan bir ailedir. *Seçme Aksiyomuna* göre (22.14) ailesinin kartezyen çarpımı boş değildir; yani öyle bir

$$f : \mathscr{L} \to \bigcup_{A \in \mathscr{L}} \mathscr{L}_A \tag{22.15}$$

fonksiyonu vardır ki

$$A \in \mathscr{L} \Rightarrow f(A) \in \mathscr{L}_A \tag{22.16}$$

olur. (22.12) ve (22.16) den

$$A \in \mathscr{L} \Rightarrow A \nsubseteq f(A) \tag{22.17}$$

çıkar. Oysa (22.13) ve (22.15) den

$$f : \mathscr{L} \to \mathscr{L} \tag{22.18}$$

yazabiliriz. (22.17) koşulu $(\mathscr{L}\ \subset)$ sistemi ile bu f fonksiyonunun *Sabit Nokta Teoremi*nin koşullarını sağladığını gösterir. Öyleyse

$$(\exists \Omega \in \mathscr{L})\, f(\Omega) = \Omega \tag{22.19}$$

olmalıdır. (22.17) ile (22.18) nin çelişikliği, $(\mathscr{L}.\ \subset)$ sisteminin büyükçe bir öğesinin var olmadığı kabulümüzden gelmektedir. Demek ki $\mathscr{L}$ nin bir büyükçe öğesi vardır. $\mathscr{L}$ nin tanımı gereğince, varlığını söylediğimiz bu büyükçe öğe $(\mathscr{L}, \preceq)$ içinde bir büyük zincirdir,

HB $\Rightarrow$ ZT: *Hausdorff Büyüklük İlkesini* kabul ederek *Zorn Teoremini* ispat edeceğiz. $(\mathscr{L}, \preceq)$ tikel sıralanmış bir sistem olsun. [HBi] gereğince, bunun içinde büyük bir zincir vardır. Bu zinciri D ile gösterelim. [ZT] nin varsayımından D nin bir üst sınırı vardır; buna x diyelim. Göstereceğiz ki bu x öğesi $(\mathscr{L}, \preceq)$ nin *büyükçe* bir öğesidir. Gerçekten, $x \preceq y$ koşulunu sağlayan bir $y \in \mathscr{L} \setminus D$ öğesi var olsaydı, D büyükçe bir zincir olduğundan $D \cup \{y\}$ kümesi de aynı $\preceq$ bağıntısına göre bir *zincir* olurdu. Oysa D büyükçe bir zincir olduğundan bunu kapsayan başka bir zincir var olamaz. O halde hiç bir $y \in \mathscr{L}$ için $x \preceq y$ olamaz; yani x öğesi $(\mathscr{L}, \preceq)$ sisteminin *büyükçe(maksimal)* bir öğesidir.

ZT $\Rightarrow$ WO: S herhangi bir küme olsun. Bütün $G \subset S \times S$ grafikleri içinde öyle bir tanesinin varlığını göstereceğiz ki, bu grafiğe tekabül eden bağıntı, S üzerinde bir *iyi sıralama* bağıntısı olacaktır. İspatı dört adımda tamamlayacağız.

1.Adım: Grafik ile bağıntı birbirlerini tek olarak belirlediklerine göre, yalnızca grafiklerle ilgilenmek yetecektir. Önce bir gösterim tanımlayacağız: Eğer A, S nin herhangi bir G grafiğinin temsil ettiği bağıntıya göre iyi sıralanmış bir alt kümesi ise, bunu kısaca, (A, G) ile gösterelim. S kümesinin herhangi bir bağıntıya göre iyi sıralanmış bütün alt kümelerinin ailesini $\mathscr{X}$ ile gösterelim:

$$\mathscr{X} = \{(A, G) \,|\, G,\ A \subset S \quad \text{üzerinde bir iyi sıralama grafiğidir}\} \tag{22.20}$$

Simdi $\mathscr{X}$ üzerinde $\prec$ simgesiyle göstereceğimiz bir bağıntıyı şöyle tanımlayalım: Her $A, G), (A', G') \in \mathscr{X}$ için

$$(A, G) \prec (A', G') \Leftrightarrow \begin{cases} (a) & A \subset A' \\ (b) & G \subset G' \\ (c) & x \in A \wedge y \in A' \setminus A \Rightarrow (x, y) \in G \end{cases} \tag{22.21}$$

olsun. $(\mathscr{X}, \preceq)$ nin tikel sıralanmış bir sistem olduğu kolayca görülebilir.

2.Adım:

$$\mathscr{A} = \{(A_\imath, G_\imath) \,|\, \imath \in I\}$$

kümesi $\mathscr{X}$ içinde bir zincir olsun.

$$A = \bigcup_{\imath \in I} A_\imath$$

$$G = \bigcup_{\imath \in I} G_\imath$$

diyelim. Bu durumda $(A, G) \in \mathscr{X}$ dir. Gerçekten, $A \subset S$ olacağı açıktır. Öyleyse, $G \subset A \times A$ grafiğinin belirlediği bağıntının A üzerinde bir *iyi sıralama* bağıntısı olduğunu göstermek yetecektir. Şimdi bunu gösterelim.

Bağıntı yansımalıdır:

$$x \in A \Rightarrow \exists \imath(\imath \in I \wedge x \in A_\imath) \Rightarrow (x,x) \in G_\imath \subset G$$

den istenen şey çıkar.

Bağıntı antisimetriktir:

$$(x,y),(y,x) \in G \Rightarrow (\exists \imath \in I)(\exists \jmath \in I)[(x,y),(y,x) \in G_\imath]$$

dır. Oysa $\mathscr{A}$ bir zincir olduğundan ya $G_\imath \subset G_\jmath$ ya da $G_\jmath \subset G_\imath$ dir. Birincisinin olduğunu varsayalım. Bu durumda $(x,y) \in G_\jmath$ ve $(y,x) \in G_\jmath$ dir. $G_\jmath$ antisimetrik olduğundan, bu, $x = y$ olmasını gerektirir.

Bağıntı geçişkendir:

$$(x,y),(y,z) \in G \Rightarrow (\exists \imath \in I)(\exists \jmath \in I)[(x,y),(y,z) \in G_\imath]$$

dir. $\mathscr{L}$ bir zincir olduğundan ya $G_\imath \subset G_\jmath$ ya da $G_\jmath \subset G_\imath$ olacaktır. Birincisi varolsun. Bu, $(x,y) \in G_j \wedge (y,z) \in G?j$ olmasını ve bu da $(x,z) \in G_\jmath \subset G$ olmasını gerektirir. Buradan, söz konusu bağıntının bir tikel sıralama bağıntısı olduğunu söyleyebiliriz.

Bağıntı iyi sıralamadır: Bunu göstermek için, sözkonusu sıralama bağıntısına göre A nın her alt kümesinin en küçük öğesinin olduğunu göstermeliyiz. A nın boş olmayan bir alt kümesine D diyelim. $D \cap B_\imath \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $\imath \in I$ varolacaktır. $D \cap B_\imath \subset B_\imath$ ve $B_\imath$ iyi sıralı olduğundan $D \cap B_\imath \subset B_\imath$ nin $(B_\imath, G_\imath)$ içinde en küçük öğesi vardır. Buna b diyelim:

$$(\forall y \in D \cap B_\imath) \quad (b,y) \in G_\imath$$

dir. Şimdi bu b öğesinin D nin (A,G) içinde en küçük öğesi olduğunu göstereceğiz. Bir $x \in D$ seçelim. İki hal vardır:

$$\begin{aligned} x \in A_\imath &\Rightarrow (b,x) \in G_\imath \subset G \\ x \notin A_\imath &\Rightarrow (\exists \jmath \in I)\; x \in A_\jmath \Rightarrow A_\jmath \nsubseteq A_\imath \\ &\Rightarrow (A_\jmath, G_\jmath) \npreceq (A_\imath, G_\imath) \\ &\Rightarrow (A_\imath, G_\imath) \prec (A_\jmath, G_\jmath) \end{aligned}$$

dir. $b \in A_\imath$, $x \in (A_\jmath \setminus A_\imath)$ ve $(A_\imath, G_\imath) \prec (A_\jmath, G_\jmath)$ olduğundan (22.21) gereğince $(b,x) \in G_\jmath \subset G$ olacaktır. Öyleyse b, D nin (A,G) içinde en küçük öğesidir.

3.Adım: Bundan önceki adımda kabul edilen varsayımlar altında (A,G) , $\mathscr{A}$ nın bir üst sınırıdır.

Bunu göstermek için bir $(A_\imath, G_\imath) \in \mathscr{A}$ seçelim; $A_\imath \subset A$ ve $G_\imath \subset G$ olacaktır. $x \in A_\imath$, $y \in A$ ve $y \notin A_\imath$ olduğunu varsayalım, $y \in A_\jmath$ olacak şekilde bir $\jmath \in I$ varolacaktır. $y \in A_\imath$ ve $y \notin A_\jmath$ olduğundan

$$(A_\jmath, G_\jmath) \npreceq (A_\imath, G_\imath)$$

dır; dolayısıyla

$$(A_\imath, G_\imath) \prec (A_\jmath, G_\jmath)$$

olacaktır. Şimdi $x \in A_\imath$ ve $y \in B_\jmath \setminus B_\imath$ ise (22.21) gereğince, $(x, y) \in G_\jmath \subset G$ çıkar. Demek ki

$$(A_\imath, G_\imath) \preceq (A, G)$$

dir.

4.Adım: Her küme iyi sıralanabilir.

2. ve 3. Adım gereğince, $(\mathscr{X}, \preceq)$ tikel sıralanmış sistemi içindeki her zincirin bir üst sınırı vardır. Öyleyse, *Zorn Teoremi*nden, bu sistemin bir en büyük öğesinin varlığını söyleyebiliriz. $\mathscr{X}$ nin bu büyük öğesine (B, G) diyelim. $B = S$ olduğunu gösterirsek işimiz bitmiş olacaktır. Bunun için *olmayana ergi yöntemini* kullanacağız. Eğer $B \neq S$ ise $(\exists x \in S \setminus B)$ olur. Bu durumda $B \cup \{x\}$ kümesi üzerinde, grafiği

$$G^* = G \cup \{(a, x) \,|\, a \in B\}$$

olan bağıntıyı düşünelim.

$$(B, G) \prec (B \cup \{x\}, G^*)$$

olacağı apaçıktır, ki bu (B, G) nin $(\mathscr{X}, \preceq)$ içinde büyükçe bir öğe olmasıyla çelişir. Demek ki $B = S$ dir.

WO $\Rightarrow$ SA: $\{A_\imath, \,|\, \imath \in I\}$ boş olmayan kümelerden oluşan boş olmayan bir aile olsun.

$$S = \bigcup_{\imath \in I} A_\imath$$

diyelim, *İyi Sıralama Teoremi* uyarınca, S kümesi iyi sıralanabilir. Bu sıra bağıntısını $\preceq$ simgesiyle gösterelim. Her $\imath \in I$ için, $\preceq$ iyi sıralamasına göre, $A_\imath$ kümesinin başlangıç öğesi $f(\imath)$ olsun. Böylece, f fonksiyonu verilen aile için bir *seçme fonksiyonu* olur.

[14], [1], [31], [12], [4], [22], [5], [14], [1],[31]