Bölüm 14

DOĞAL SAYILARDA ARİTMETİK

14.1 DOĞAL SAYILAR

Doğal sayılar üzerindeki aritmetik, ileride sözünü edeceğimiz nicelik sayıları üzerindeki aritmetikten çıkarılır. Ancak, pratik işlemleri yapabilmemiz için, bu kesimde, aksiyomatik yapısını gözetmeden, doğal sayılar üzerinde aritmetiğin kurallarını vermekte yarar görüyoruz. Bunu yapabilmek için iki postülata gerekseme duyarız.

Tanım 14.1.1. A ile B kümelerinin bire-bir eşleşmesi demek, bire-bir-örten bir $f : A \to B$ fonksiyonunun var olması demektir.

Bu durumda

$$A \cong B \tag{14.1}$$

yazacağız.

Aksiyom 14.1.1. *Her kümenin bir nicelik sayısı vardır.*

Bir A kümesinin nicelik sayısını $\bar{\bar{A}}, \natural(A), n(A), nic(A), a$ simgelerinden birisiyle göstereceğiz.

Aksiyom 14.1.2. *İki kümenin nicelik sayılarının eşit olması için gerekli ve yeterli koşul, kümelerin birbirlerine bire-bir eşleşebilmesidir.*

Bu aksiyomu eşdeğer olan şu teoremle ifade edebiliriz:

Teorem 14.1.1.

$$\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}} \Longleftrightarrow A \cong B \tag{14.2}$$

Önerme 14.1.1. *Aşağıdaki özelikler vardır.*

1. Boş kümenin nicelik sayısı 0 dır: $\natural(\emptyset) = 0$.
2. $\{0\}$ kümesi bir öğeli bir kümedir; nicelik sayısı 1 dir.
3. Bir ögeli bütün kümeler $\{0\}$ kümesine eşgüçlüdür.
4. $\{0, 1\}$ kümesinin iki öğesi vardır; nicelik sayısı 2 dir. İki ögeli bütün kümeler $\{0, 1\}$ kümesine eşgüçlüdür.

Böyle devam edersek, *Doğal Sayılar Kümesi*'nin ögelerini, sırayla, oluşturabiliriz:

Tanım 14.1.2.

$$\begin{aligned} 0 &= \natural(\emptyset) \\ 1 &= \natural(\{0\}) \\ 2 &= \natural(\{0,1\}) \\ 3 &= \natural(\{0,1,2\}) \\ \vdots &\quad \vdots \\ r &= \natural(\{0,1,2,\cdots,r-1\}) \\ \vdots &\quad \vdots \end{aligned} \tag{14.3}$$

Tanım 14.1.3. m bir doğal sayı ise, $m+1$ doğal sayısına, m nin *ardışığı,* denilir.

Aşağıdaki teorem, tanımdan kolayca çıkar.

Teorem 14.1.2. *Her m doğal sayısının $m+1$ ile gösterilen bir ardışığı vardır.*

14.1.1 Sonlu ve Sonsuz Kümeler

Tanım 14.1.4. (14.3) deki kümelerden birisine eşgüçlü olan küme *sonlu bir küme*'dir.

Tanım 14.1.5. Sonlu olmayan her küme *sonsuz bir küme*'dir.

Bu tanımlardan, hemen şu sonucu elde ederiz:

Teorem 14.1.3. *Bütün sonlu kümelerin nicelik sayılarından oluşan küme* doğal sayılar kümesi *'dir.*

Teorem 14.1.4. *Doğal Sayılar Kümesi sonsuz bir kümedir.*

İSPAT: Her m doğal sayısının bir ardışığı olduğundan, (14.3) sisteminde, *Doğal Sayılar Kümesi*'nin kuruluşu asla bitirilemez. Dolayısıyla, (14.3) sistemindeki kümelerden hiç birisi $\mathbb{N}$ ye eşgüçlü olamaz. Öyleyse, $\mathbb{N}$ sonlu bir küme değildir.

Sayı kümeleri üzerinde tanımlayacağımız işlemler ve bağıntılar için, ispatları apaçık olan, aşağıdaki özeliklere gerekseme duyacağız.

Teorem 14.1.5. *A ile B iki küme olsun.*

1. *Sonlu bir kümenin her alt kümesi de sonludur.*
2. *A ile B sonlu iseler, $A \cup B$ de sonludur.*
3. *A sonlu ise, her B için, $A \cap B$ de sonludur.*
4. *A ile B sonlu iseler, $A \times B$ de sonludur.*

Uzlaşma:

$$a, b, c, \cdots$$

gibi doğal sayıların her birisi için,

$$a = \natural(A),\ b = \natural(B),\ c = \natural(C), \cdots$$

eşitliklerini sağlayan

$$A, B, C, \cdots$$

kümelerini seçebiliriz. Dolayısyla, Aşağıdaki her teorem ve problemde, bunları tekrarlamamak için, kullanıldıkları her yerde, yukarıda söylenen uyumu sağladıklarını varsayacağız. Ayrıca, gerekiyorsa, seçilen kümelerin birbirlerinden ayrık olduklarını kabul edeceğiz.

14.2 ARİTMETİK

14.2.1 Doğal sayılarda Eşitlik

Tanım 14.2.1. a, b iki doğal sayı ise, bunların, birbirlerine eşit oluşunu $a = b$ simgesiyle gösterecek ve

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad \natural(A) = \natural(B) \tag{14.4}$$

bağıntısıyla tanımlayacağız.

Bunu, *"a, b ye eşittir"* ya da *"a eşit b dir"*, diye okuyacağız.

Eşitliğin aşağıda sıralanan özelikleri, tanımdan ve (14.3) bağıntısından çıkar:

Teorem 14.2.1. *Aşağıdaki özelikler vardır.*

1.	$a \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$a = a$	(Yansıma Özeliği)
2.	$a, b \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$a = b \vee b = a$	(İkileme Özeliği)
3.	$a, b \in \mathbb{N},\ a = b$	$\Rightarrow$	$b = a$	(Simetri Özeliği)
4.	$a, b, c \in \mathbb{N},\ a = b \wedge b = c$	$\Rightarrow$	$a = c$	(Geçişkenlik Özeliği)

14.2.2 Toplama

Tanım 14.2.2. a ile b doğal sayılarının toplamı, $a+b$ simgesiyle gösterilir ve

$$a+b=\natural(A\cup B) \qquad A\cap B=\emptyset \tag{14.5}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Sonlu iki kümenin bileşimi sonlu olduğundan, $\natural(A\cup B)$ nicelik sayısı, daima $\mathbb{N}$ ye aittir. Dolayısıyla, $+$ (toplama) işlemi $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ den $\mathbb{N}$ ye tanımlı bir ikili işlemdir:

$$+\ :\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}, \quad +\ :\ (a,b)\to a+b \tag{14.6}$$

Örnek

$A=\{a,b,c,d,e\}, B=\{x,y,z\}$ kümeleri için,

$$\begin{aligned}
\natural(A) &= 5\\
\natural(B) &= 3\\
A\cup B &= \{a,b,c,d,e,x,y,z\}\\
\natural(A\cup B) &= 8\\
A\cap B &= \phi
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\natural(A)+\natural(B)=\natural(A\cup B)\Leftrightarrow 5+3=8$$

çıkar.

Toplama İşleminin Özelikleri

Teorem 14.2.2. *Aşağıdaki özelikler vardır.*

1. $a,b\in\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$a+b\in\mathbb{N}$	*(Kapalılık Özeliği)*
2. $a,b\in\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$a+b=b+a$	*(Yer Değişme Özeliği)*
3. $a,b,c\in\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$a+(b+c)=(a+b)+c$	*(Birleşme Özeliği)*
4. $a,b,c\in\mathbb{N},\ a=b$	$\Rightarrow$	$a+c=b+c$	*(Sadeleşme Özeliği)*
5. $a\in\mathbb{N},\ 0\in\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$a+0=0+a=a$	*(Birim Öğe Var)*
6. $a,b\in\mathbb{N}$ ve $a\neq 0$	$\Rightarrow$	$a+b\neq 0$	*(Ters Öğe Yok)*

İSPAT:

1. Bu özeliğin ispatı, toplama tanımından çıkar.
2. $A\cup B=B\cup A$ eşitliğinden çıkar.
3. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ eşitliğinden çıkar.
4. Bu özelik, bir eşitliğin iki yanına aynı bir sayı eklenir ya da çıkarılırsa, eşitliğin bozulmayacağını söyler. Eşitliğin ispatı,

   $$A=B \quad\Rightarrow\quad A\cup C=B\cup C$$

   eşitliğinden çıkar.

5. Bu özelik, 0 sayısının, toplama işlemine göre birim öğe olduğunu söyler. İspatı, $A \cup \emptyset = A$ eşitliğinden çıkar.

6. Bu özelik, sıfırdan farklı bir doğal sayının, toplama işlemine göre, $\mathbb{N}$ içinde, ters öğesinin olmadığını söyler. İspatı, $A \neq \emptyset$ ise, her B kümesi için $A \cup B \neq \phi$ özeliğinden çıkar.

14.2.3 Çarpma

Tanım 14.2.3. a ile b nin çarpımı $a \times b$, $a.b$, ab simgelerinden birisiyle gösterilir ve aşağıdaki bağıntı ile tanımlanır:

$$a.b = \natural(A \times B) \tag{14.7}$$

Sonlu iki kümenin kartezyen çarpımı sonlu olduğundan, $\natural(A \times B)$ nicelik sayısı, daima $\mathbb{N}$ ye aittir. Dolayısıyla, $\times$ (çarpma) işlemi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ den $\mathbb{N}$ ye tanımlı bir ikili işlemdir:

$$\cdot\ :\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \cdot\ :\ (a, b) \hookrightarrow a.b \tag{14.8}$$

Örnek

$A = \{a, b, c\}$, $\quad B = \{x, y\}$ kümeleri için $\natural(A) = 3, \natural(B) = 2$ dir.

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$$

den $\natural(A \times B) = 6$ olduğunu görüyoruz. O halde,

$$\natural(A).\natural(B) = \natural(A \times B) \quad \text{ya da} \quad 3.2 = 6$$

çıkar.

Doğal sayılarda çarpma işlemi, aynı sayının, ardışık toplamlarını kısa yoldan bulmaya yarar.

Örnek

12 dersliği olan bir okulda, her dersliğe 15 sıra alınacaktır. Kaç sıra ısmarlanmalıdır?

Sorunun yanıtı, 12 tane 15 in toplamıdır:

$$15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 180$$

Görüldüğü gibi, toplanacak sayıların sayısı çoğaldıkça, ardışık toplamaları yapmak, zor değilse de, can sıkıcı olmaya başlar. Böyle bir toplama yerine, aynı sonucu veren

$$15 \times 12 = 180$$

çarpma işlemini yapmak daha kolaydır.

Çarpma İşleminin Özelikleri

Teorem 14.2.3. *Aşağıdaki özelikler sağlanır.*

1. $a, b \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$a.b \in \mathbb{N}$	*(Kapalılık Özeliği)*
2. $a, b \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$a.b = b.a$	*(Yer Değişme Özeliği)*
3. $a, b, c \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$a.(b.c) = (a.b).c$	*(Birleşme Özeliği)*
4. $a, b, c \in \mathbb{N},\ a = b$	$\Rightarrow$	$a.c = b.c$	*(Sadeleşme Özeliği)*
5. $a \in \mathbb{N},\ 1 \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$a.1 = 1.a = a$	*(Birim Öğe Var)*
6. $a \in \mathbb{N},\ 0 \in \mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$a.0 = 0.a = 0$	*(Yutan Öğe Var)*
7. $a, b \in \mathbb{N}$ ve $a \neq 1$	$\Rightarrow$	$a.b \neq 1$	*(Ters öğe Yok)*

İSPAT:

1. Bu özeliğin ispatı, çarpma tanımından çıkar.

2. $A \times B \cong B \times A$ bağıntısından çıkar.

3. $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$ bağıntısından çıkar.

4. Bu özelik, *bir eşitliğin iki yanı, aynı bir sayı ile çarpılırsa, eşitliğin bozulmayacağını,* söyler. Eşitliğin ispatı,

$$A \cong B \quad \Rightarrow \quad A \times C \cong B \times C$$

   bağıntısından çıkar.

5. Bu özelik, 1 *sayısının, çarpma işlemine göre birim öğe olduğunu,* söyler. $B = \{b\}$ gibi, tek öğeli bir küme olsun. $A \times B \cong B \times A \cong A$ bağıntısı vardır. Buradan istenen eşitlik çıkar.

6. Bu özelik, 0 *sayısının, çarpma işlemine göre yutan öğe olduğunu,* söyler. İspatı, $A \times \emptyset = \emptyset$ bağıntısından çıkar.

7. Bu özelik, 1 *den farklı bir doğal sayının, çarpma işlemine göre,* $\mathbb{N}$ *içinde, ters öğesinin olmadığını,* söyler. İspatı, $\natural(A) \neq 1$ ise, her B kümesi için $\natural(A \times B) \neq 1$ özeliğinden çıkar.

Dağılma Kuralları

Teorem 14.2.4. *Doğal sayılarda çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine dağılma özeliği vardır.*

İSPAT: Çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özeliği olduğunu göstermeliyiz.

Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özeliği:

$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a.(b + c) = a.b + a.c \tag{14.9}$$

dir. Bu eşitlik,

$$A \times (B \cup C) \cong (A \times B) \cup (A \times C)$$

bağıntısından çıkar.

Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özeliği:

$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad (b + c).a = b.a + c.a \tag{14.10}$$

dır. Bu eşitlik,

$$(B \cup C) \times A \cong (B \times A) \cup (C \times A)$$

bağıntısından çıkar.

Örnek

$$7[8 + 12(5 + 9)] = 7[8 + 60 + 108] = 56 + 420 + 756 = 1232$$

Örnek

$5(2x + 1) = 7(x + 3) + 11$ açık önermesinin doğruluk kümesini bulunuz.

Çözüm:

$5(2x+1)$	$=$	$7(x+3)+11$	
$10x+5$	$=$	$7x+21+11$	*(Dağılma Özeliği)*
$10x+5$	$=$	$7x+32$	*(Toplama Tanımı)*
$10x+5-5$	$=$	$7x+32-5$	*(Sadeleştirme Özeliği)*
$10x$	$=$	$7x+27$	*(Toplama Tanımı)*
$10x-7x$	$=$	$7x-7x+27$	*(Sadeleştirme Özeliği)*
$3x$	$=$	27	*(Toplama Tanımı)*
x	$=$	9	*(Sadeleştirme Özeliği)*

14.2.4 Çarpınım (Faktöryel)

Tanım 14.2.4. n bir doğal sayı ise, $n!$ (n faktöryel) sayısı

$$n! = 1.2.3\ldots(n-1)n, \qquad 0! = 1, \qquad 1! = 1$$

biçiminde tanımlanır.

Örnekler

1. Aşağıdaki tablo, faktöryelin nasıl hızla büyüdüğünü gösterir.

$$
\begin{aligned}
0! &= 1\\
1! &= 1\\
2! &= 1.2 = 2\\
3! &= 1.2.3 = 6\\
4! &= 1.2.3.4 = 24\\
5! &= 1.2.3.4.5 = 120\\
6! &= 1.2.3.4.5.6 = 720\\
7! &= 1.2.3.4.5.6.7 = 5040\\
8! &= 1.2.3.4.5.6.7.8 = 40320\\
9! &= 1.2.3.4.5.6.7.8.9 = 362.880\\
10! &= 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3.628.800\\
11! &= 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11 = 39.916.800\\
12! &= 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12 = 479.001.600\\
20! &= 2.432.902.008.176.640.000
\end{aligned}
$$

2. Aşağıdaki işlemi inceleyiniz.

$$
\begin{aligned}
\frac{11!}{(6!)(5!)} - 5\frac{6!}{(4!)(2!)} &= \frac{7.8.9.10.11}{5.4.3.2.} - 5\frac{5.6}{2} - 6\\
&= 462 - 75 - 6\\
&= 381
\end{aligned}
$$

14.2.5 Uygulamalar

1. $17! + 16!$ sayısı aşağıdakilerden hangisi ile tam bölünemez?

$$(a)\,2 \quad (b)\,4 \quad (c)\,6 \quad (d)\,16 \quad (e)\,17$$

2. $15! = \frac{m}{16}$ ise, (17!-16!) sayısını m türünden hesaplayınız.

3. $2(2^3 + 1) + 2346 \div 23$ sayısını bulunuz.

4. Her n doğal sayısı için, aşağıdakilerden hangisi daima tektir?

$$(a)n^2 - 7 \quad (b)n^2 + n \quad (c)7n \quad (d)4n - 2 \quad (e)2n + 5$$

5. n çift bir doğal sayı ise, aşağıdakilerden hangileri daima çift olur?

$$(a)\frac{n+1}{3} \quad (b)n^2 - n \quad (c)n^2 + n - 1 \quad (d)2n + 3 \quad (e)\frac{n}{2} + 1$$

14.2.6 Üs (Kuvvet) Alma

Bir doğal sayının kendisiyle ardışık çarpımlarını daha kısa göstermek için, *üstel gösterim*'i kullanırız.

Tanım 14.2.5. İkisi birden sıfır olmayan a ve n doğal sayıları verilsin. a doğal sayısının n kez kendisiyle çarpımını, a^n ile göstereceğiz:

$$\underbrace{a.a.a\cdots a}_{n\ tane} = a^n \tag{14.11}$$

a^n ifadesine	*üstel gösterim (üstel ifade),*	
a ya	*taban,*	
n ye	*üs (kuvvet),*	denilir.
a^n gösterimine	"*a nın n inci kuvveti*", ya da "*a üssü n*",	
a^2 ye	"*a kare,*	
a^3 e	"*a küp,*	

Uyarı: 0^0 ifadesi tanımlı değildir.

Tanım: *Üs* 1 *ya da* 0 *olduğunda, aşağıdaki tanımları yapıyoruz:*

$$a^1 = a, \qquad a^0 = 1$$

Örnekler

a. $2^7 = 2.2.2.2.2.2.2 = 128$

c. $(17)^1 = 17$

b. $3^5 = 3.3.3.3.3 = 243$

d. $4^4 = 4.4.4.4 = 256$

e. $(196)^0 = 1$

f. $0^{14} = 0$

Üs Alma İşleminin Özelikleri

Teorem 14.2.5. *a, b sıfırdan farklı iki doğal sayı ve m, n iki doğal sayı ise, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

1. $a^m.a^n = a^{m+n}$
2. $a^n.b^n = (ab)^n$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$.

İSPAT:
1. $\forall a \in \mathbb{N}^+$ ve $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} a^m.a^n &= (\overbrace{a.a.a\cdots a}^{m\ tane}).(\overbrace{a.a.a\cdots a}^{n\ tane}) \\ &= \underbrace{a.a.a\cdots a.a.a.a.\cdots a}_{m+n\ tane} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

olur ve istenen eşitlik çıkmış olur.

2. $\forall a \in \mathbb{N}^+$ ve $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için,

$$
\begin{aligned}
(a^m)^n &= \overbrace{a^m.a^m.a^m \cdots a^m}^{n\ tane} \\
&= a^{\overbrace{m+m+m+\cdots+m}^{n\ tane}} \\
&= a^{m.n}
\end{aligned}
$$

eşitliği vardır.

3. $\forall a, b \in \mathbb{N}^+$ ve $\forall m \in \mathbb{N}$ için,

$$
\begin{aligned}
(a.b)^m &= \overbrace{(a.b).(a.b).(a.b)\cdots(a.b)}^{m\ tane\ (a.b)} \\
&= a.b.a.b.a.b \cdots a.b \\
&= \underbrace{(a.a.a.\cdots a)}_{m\ tane}\underbrace{(b.b.b\cdots b)}_{m\ tane} \\
&= a^m.b^m
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

Örnekler

1.

$$
\begin{aligned}
(2^3)^4.4^3.5^3 &= 2^{12}.(2.2)^3.5^3 \\
&= 2^{12}.2^3.2^3.5^3 \\
&= 2^{12+3+3}.5^3 \\
&= 2^{18}.5^3 \\
&= 2^6.2^6.2^6.5^3 \\
&= 64.64.64.125 \\
&= 262144.125 \\
&= 32768000
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
4^2.2^5.3^4 &= (2.2)^2.2^5.3^4 \\
&= 2^2.2^2.2^5.3^4 \\
&= 2^9.3^4 \\
&= 512.81 \\
&= 41472
\end{aligned}
$$

3.

$$\begin{aligned}(a^2.b^3))^4 &= (a^2)^4.(b^3)^4 \\ &= a^8.b^{12}\end{aligned}$$

14.2.7 Doğal Sayılarda Sıralama

Tanım 14.2.6. a, b doğal sayıları verildiğinde, $a+c=b$ eşitliğini sağlayan bir c doğal sayısı varsa, "a sayısı b sayısından küçüktür," denilir ve $a<b$ simgesiyle gösterilir:

$$a<b \quad \Leftrightarrow \quad (\exists c \in \mathbb{N}^{+})(\ a+c=b\ ) \tag{14.12}$$

Sıralama eyleminde kullanılan $>$, $\leq, \geq$ bağıntıları, aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım:

$$\begin{aligned} b>a &\quad\Leftrightarrow\quad a<b \\ a\leq b &\quad\Leftrightarrow\quad (a<b)\vee(a=b) \\ b\geq a &\quad\Leftrightarrow\quad a\leq b \end{aligned}$$

Örnek
12 ve 7 doğal sayıları verildiğinde, 5 doğal sayısı, $7+5=12$ eşitliğini sağlar. O halde, $7<12$ dir.

Sıralama Bağıntısının Özelikleri

Teorem 14.2.6. *a, b, c doğal sayıları için, aşağıdaki bağıntılar sağlanır:*

1) $(a<b)\vee(a=b)\vee(a>b)$			*(Üç Hal Kuralı)*
2) $(a<b)\wedge(b<c)$	$\Rightarrow$	$a<c$	*(Geçişkenlik)*
3) $a<b$	$\Rightarrow$	$a+c<b+c$	*(Toplamda Sadeleşme)*
4) $(a<b)\wedge(c<d)$	$\Rightarrow$	$a+c<b+d$	*Yan yana Toplama)*
5) $a<b\vee(c>0)$	$\Rightarrow$	$a.c<b.c$	*(Çarpmada Sadeleşme)*

Örnek
$5(x-7)\leq 30-2(x+1)$ eşitsizliğinin, Doğal Sayılar Kümesindeki çözümlerini bulunuz.
Çözüm:

$$\begin{aligned} 5(x-7)\leq 30-2(x+1) &\Rightarrow 5x-35\leq 30-2x-2 \\ &\Rightarrow 5x+2x\leq 30+35-2 \\ &\Rightarrow 7x\leq 63 \\ &\Rightarrow x\leq 9 \end{aligned}$$

9 dan büyük olmayan doğal sayılar, verilen eşitsizliğin çözüm kümesini oluşturur:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

14.2.8 Çıkarma

İki doğal sayı verildiğinde, büyük olandan küçük olanı çıkardığımızda, elde edeceğimiz fark gene bir doğal sayıdır. Ancak, küçük olandan, büyük olanı çıkardığımızda, elde edeceğimiz fark, bir doğal sayı değildir. Bunu, matematiksel simgelerle ifade edelim.

a, b doğal sayıları verilsin. $a \geq b$ ise, $a = b + c$ koşulunu sağlayan c doğal sayısı, $a - b$ farkıdır:

$$a - b = c \quad \Leftrightarrow \quad a = b + c \tag{14.13}$$

Örnekler

1. $(7 > 5) \wedge (7 = 5 + 2) \quad \Rightarrow \quad 7 - 5 = 2$
2. $(5 < 7) \quad \Rightarrow \quad (5 - 7) \notin \mathbb{N}$

O halde, çıkarma işlemi, doğal sayılar kümesi üzerinde, ikili bir işlem değildir. Neden?

14.2.9 Uygulamalar

1. Doğal Sayılar Kümesi'nin çıkarma işlemine göre *kapalı* olmadığını gösteriniz.

2. Doğal Sayılar Kümesi'nde çıkarma işleminin *yer değişme özeliği*'nin olmadığını gösteriniz. ($a - b \neq b - a$).

3. Doğal Sayılar Kümesi'nde çıkarma işleminin *birleşme özeliği*'nin olmadığını gösteriniz. ($a - (b - c) \neq (a - b) - c$).

4. Doğal Sayılar Kümesi'nde, çıkarma işleminin *birim öğe*'sinin olmadığını gösteriniz.

5. Doğal Sayılar Kümesi'nde, çıkarma işlemine göre hiç bir öğenin *tersi*'nin olmadığını gösteriniz.

6. Doğal Sayılar Kümesi'nde, çarpmanın, çıkarma işlemi üzerine *soldan ve sağdan dağılma özeliği*'nin olduğunu gösteriniz.

14.2.10 Bölme

Tanım 14.2.7. a, b iki doğal sayı ve $b \neq 0$ olsun. $a = b.c$ eşitliğini sağlayan bir c doğal sayısı varsa, *"a sayısı b ye tam bölünüyor,"* denilir ve $b \mid a$ simgesiyle gösterilir. b sayısı a yı tam bölmüyorsa, $b \nmid a$ simgesini kullanırız.

Bölme işlemi,

$$\frac{a}{b}, \quad a/b, \quad a:b, \quad a \div b \tag{14.14}$$

simgelerinden birisiyle gösterilir. $a \div b$ bölme işleminde a *bölünen*, b *bölen,* ve c *bölümdür.*

Örnek $625 = 125.5 \Rightarrow 625 \div 125 = 5$ olur.

$a \div b = k$ ise, "*a sayısı, b nin k katıdır.*

$625 \div 125 = 5$ olduğundan 625 sayısı 125 in in 5 katıdır; 625 sayısı 125 e tam bölünür.

Örnek $123 = 5.c$ eşitliğini sağlayan hiç bir c doğal sayısı yoktur. Dolayısıyla, 123 sayısı 5 e tam bölünemez.

a, b, k doğal sayılar ve $b \neq 0$ olmak üzere, a sayısı b nin k katından büyük $k+1$ katından küçükse, a sayısı, b ye tam bölünmez. Bu durumda, $0 \leq r < b$ olmak üzere $a = b.k + r$ eşitliğini sağlayan bir r doğal sayısı vardır:

$$a = b.k + r$$

eşitliğinde, a *bölünen,* b *bölen*, k *bölüm* ve r *kalan*'dır.

Örnek $76 = 9.8 + 4$ olur.

14.2.11 Uygulamalar

1. Doğal Sayılar Kümesi'nin bölme işlemine göre *kapalı olmadığını* gösteriniz. (*Yol Gösterme :* $a \div b \notin \mathbb{N}$ olacak biçimde a, b doğal sayılarını bulunuz.)

2. Doğal Sayılar Kümesi'nde bölme işleminin *değişme özeliği*'nin olmadığını göstiniz. (*Yol Gösterme :* $a \div b \neq b \div a$olacak biçimde a, b doğal sayılarını bulunuz.)

3. Doğal Sayılar Kümesi'nde bölme işleminin *birleşme özeliği*'nin olmadığını gösteriniz. (*Yol Gösterme :* $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$)

4. Doğal Sayılar Kümesi'nde, bölme işleminin birim öğesinin olduğunu gösteriniz.

5. Doğal Sayılar Kümesi'nde, bölme işlemine göre, 1 den farklı hiç bir öğenin tersinin olmadığını gösteriniz.

6. Doğal Sayılar Kümesi'nde, bölme işleminin, toplama işlemi üzerine *soldan ve sağdan dağılma özeliği*'nin olmadığını göstermek için,

$$a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$$

$$(b + c) \div a \neq (b \div a) + (c \div a)$$

bağıntılarını sağlayan a, b, c sayıları bulunuz.

7. Doğal Sayılar Kümesi'nde, bölme işleminin, çıkarma işlemi üzerine *soldan ve sağdan dağılma özeliği*'nin olmadığını göstermek için,

$$a \div (b - c) \neq (a \div b) - (a \div c)$$

$$(b - c) \div a \neq (b \div a) - (c \div a)$$

bağıntılarını sağlayan a, b, c sayıları bulunuz.

14.3 ASAL SAYILAR

Tanım 14.3.1. 1 den ve kendisinden başka hiç bir doğal sayıya tam bölünemeyen, sıfırdan farklı doğal sayılara *asal sayılar* denilir.

Asal sayılar kümesinin bazı öğeleri,

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \cdots\}$$

dir.

Tanım 14.3.2. a, b, c doğal sayıları, $a = b.c$ eşitliğini sağlıyorlarsa, b ile c ye a nın *çarpanları* denilir. Ayrıca, b ile c asal sayı iseler, b ile c sayılarına, a nın *asal çarpanları* denilir.

Örnek

$60 = 4.15$ eşitliğinde, 4 ile 15 sayıları, 60 ın çarpanlarıdır; ama asal değildirler.

$60 = 2^2.3.5$ eşitliğinde, $2, 3, 5$ sayıları 60 ın asal çarpanlarıdır. Bu eşitlikte, 60 *asal çarpanlarına ayrılmıştır,* diyoruz.

Tanım 14.3.3. a, b doğal sayılarının, 1 den başka ortak bölenleri yoksa, bu sayılara, aralarında asaldır, denilir.

Örnek

14 ile 15 sayılarının ortak çarpanları yoktur; aralarında asaldırlar.

Teorem 14.3.1. *Her doğal sayı asal çarpanlarına ayrılabilir.*

Tanım 14.3.4. İki ya da daha çok doğal sayının her birisini bölen sayıların en büyüğü, o sayıların ebob (en büyük ortak böleni) dir.

İki ya da daha çok doğal sayının ebob (en büyük ortak böleni), ortak asal çarpanlarının en küçük üslülerinin çarpımıdır.

Tanım 14.3.5. İki ya da daha çok doğal sayının herbirisinin katı olan sayıların en küçüğü, o sayıların ekok (en küçük ortak katı)dır.

İki ya da daha çok doğal sayının ekok (en küçük ortak katı), ortak asal çarpanlarının en büyük üslüleri ile ortak olmayan bütün asal çarpanların çarpımıdır.

ALIŞTIRMALAR

1. Doğal sayılarda bölme işleminin yer değiştirme özeliğine sahip olmadığını göstermek için,
$$a : b \neq b : a$$
eşitsizliğine örnekler veriniz.

2. Doğal sayılarda bölme işleminin birleşme özeliğine sahip olmadığını göstermek için,
$$a : (b : c) \neq (a : b) : c$$
eşitsizliğine örnekler veriniz.

3. Doğal sayılarda çarpma işleminin bölme işlemi üzerine dağılma özeliğine sahip olmadığını göstermek için,
$$a \cdot (b : c) \neq (a \cdot b) : (a \cdot c$$
eşitsizliğine örnekler veriniz.

4. Doğal sayılarda bölme işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliğine sahip olmadığını göstermek için,
$$a : (b + c) \neq (a : b) + (a : c)$$
eşitsizliğine örnekler veriniz.

5. Aşağıdaki koşolları sağlayan q, r sayılarını bulunuz.

a)	$47 = 5q + r,\ 0 \leq r < 5$	b)	$137 = 12q + r,\ 0 \leq 12$
c)	$449 = 27q + r,\ 0 \leq r < 27$	d)	$893 = 43q + r,\ 0 \leq 43$

6. Aşağıdaki kümelerden hangileri sonsuzdur? Neden?
   (a) Çift Tamsayılar Kümesi,
   (b) Tek Tamsayılar Kümesi,
   (c) 3 ile tam bölünebilen doğal sayıların oluşturduğu küme,
   (d) 12 ve 15 ile bölünebilen doğal sayıların oluşturduğu küme.
   (e) Bir kamyon dolusu kum taneciklerinden oluşan küme.

7. Aşağıdaki eşitsizliklerin $\mathbb{N}$ içindeki çözüm kümelerini yazınız.
   a) $4m < m + 12$
   b) $5m - 3 \geq 4m + 3$
   c) $8m + 2 < 14 + 2m$
   d) $2(m + 3) > 16$
   e) $5(5 + n) > 7(n + 3)$

8. (a) $2.24 + 4.20 + 3.16 - 2.8$ ifadesini, 2'nin kuvveti olarak yazınız.
   (b) $81 + 243 + 729$ ifadesini, 3'ün kuvveti olarak yazınız.

9. Tek sayıların kareleri de tek sayıdır. Neden?

10. Çift sayıların kareleri de çift sanıdır. Neden?

11. a ile n iki doğal sayı ise, $5! = 2^n a$ eşitliğini sağlayan en büyük n sayısı nedir?

12. $4^2.8^3.16^4 = 2^n$ eşitliğini sağlayan n doğal sayısını bulunuz.

13. k, r doğal sayılar olmak üzere $45k = r^3$ eşitliğini sağlayan k doğal sayılarının en küçüğü nedir?

14. $3.8^4.5^{11}$ sayısı kaç basamaklıdır?

15. Aşağıdaki sayı çiftlerinden hangileri aralarında asaldır?

$$(1452, 15) \quad (25, 36) \quad (36, 75) \quad (18, 25) \quad (19, 1426)$$

16. a bir doğal sayı ve $a \neq 0$ ise, $a^2 = 150c$ eşitliğini sağlayan en küçük c doğal sayısını bulunuz.

17. n bir asal sayı ise, n^5 sayısını tam bölen kaç tane doğal sayı vardır?

18. $5n + 18$ sayısının n doğal sayısına bölünebilmesi için, n nin alabileceği değerler nelerdir?