Bölüm 13

MATEMATİKSEL YAPILAR

13.1 YAPI KAVRAMI

Çağdaş Matematik kümeleri, kümeler üzerindeki yapıları, yapılar arasındaki dönüşümleri inceler. Buraya dek öğe, küme, işlem, fonksiyon kavramlarını kullandık. Bunları yapmakla, aslında matematiksel yapılar üzerinde çalışmış olduk. Bu bölümde yapı kavramını formal olarak tanımlayacağız. Aslında matematiksel yapılar bu dersin konusu değildir. Bu yapılar zaten ilgili derslerde ayrıntılarıyla incelenmektedir. O nedenle, burada, temel cebirsel yapıların tanımlarını vermekle yetineceğiz. [18], [21], [19], [23], [29]

Matematik soyut düşünme sanatıdır. Soyut düşünme, içinde bulunduğumuz çevre koşullarından ve her tür somut nesneden sıyrılıp düşünce üretme eylemidir. Beş elma, beş kitap, beş masa,... gibi nesneye bağlı 5 kavramı yerine soyut 5 *kavramını* koyabilmektir. Soyutlama insan aklının eriştiği en yüce yerdir. Matematik hep o yerdedir. Matematikçi hep orada düşünür.

Matematik, gündelik yaşamda karşı karşıya olduğumuz olay ve nesneleri soyutlar. Nesneleri soyut öğeler olarak görür, onlardan kümeler oluşturur. Nesneler arasındaki ilişkileri fonksiyonlarla ifade eder. Belli özeliklere sahip olanları sınıflandırır. Sınıfların özeliklerini ortaya koyar.

Herhangi bir küme matematikçi için pek ilginç olmayabilir. Ama küme üzerinde belirgin özeliklere sahip bazı bağıntılar ya da işlemler tanımlanabiliyorsa, bu, matematikçi için incelenmesi gereken bir konu olur. Bunu biraz daha somutlaştıralım. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesini düşünelim. $\mathbb{R}$ bir küme olarak bize hiç ilginç gözükmeyebilir. Ama $\mathbb{R}$ kümesi, üzerindeki toplama işlemi, çıkarma işlemi, çarpma işlemi, bölme işlemi, sıralama bağıntısı, uzunluk, açık aralık, kapalı aralık, sınırlı alt küme, sınırsız alt küme, sonlu alt küme, sonsuz alt küme vb. gibi günlük hayatımızda bile önemli rolleri olan özelikleriyle birlikte düşünülünce, birdenbire matematikçinin ilgisini çeken bir önem kazanır.

Matematiksel yapıları, bakış açımıza ya da amacımıza bağlı olarak farklı sınıflandırabiliriz. Klâsik sınıflandırmaya göre cebirsel, analiz ve geometrik yapı deyimlerini hepiniz duydunuz. Kümelerin öğeleri arasındaki ilişkileri, işlemlerle (fonksiyon) ortaya koyan yapılara cebirsel yapılar diyoruz. Grup, halka, cisim, vektör uzayları cebirsel yapıların iyi bilinen örnekleridir. Küme aileleri arasındaki ilşkileri konu edinen yapılara analiz yapıları diyoruz. Diferensiyel ve integral hesap, ölçüm kuramı, topoloji klâsik analiz yapılarıdır.

Hemen belirtelim ki, çağdaş matematik, bir yandan matematiksel yapıları daha çok ayrıştırırken öte yandan da farklı tür yapıları daha üst sınıflarda birleştirmeye uğraşır. Orada klâsik sınıflandırmanın sınırları çok aşılmıştır. Örneğin, topoloji cebir, analiz ve geometri içeren büyük bir alan haline gelmiş, çeşitli dallara ayrılmıştır. Elbette bütün bu ayrıntılar bu kitabın kapsamını çok aşar. O nedenle, bu bölümde, matematiksel yapı kavramını tanımlayıp, temel cebirsel yapıları listelemekle yetineceğiz.

Tanım 13.1.1. Bir X kümesi verilsin. $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \tau$ bu küme üzerinde birer bağıntı olsun. X kümesi bu bağıntılarla birlikte bir matematiksel yapı oluşturur. Bu yapıyı, kısaca

$$(X, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \tau) \tag{13.1}$$

ile göstereceğiz.

Matematiksel yapıların çoğu, sayı kümelerinden esinlenmiştir. Örneğin, sayılar üzerinde yapılan dört işlem grup, halka, cisim gibi cebirsel yapıların doğmasına neden olmuştur. İki sayı arasındaki fark, metrik ve topolojik uzaylara giden yolu açar. Sayılar arasındaki büyük, küçük kavramı kafes (lattice) yapısını yaratır.

13.2 YAPI TÜRLERİ

(13.1) gibi bir bağıntı verilmiş olsun. Bu yapıyı incelemek demek, $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \tau$ bağıntıları ya da işlemlerinin her birisinin X üzerindeki özeliklerini, birbirleri arasındaki ilişkileri ve bunlardan çıkarılabilecek bütün sonuçlan incelemek demektir. Her küme, her bağıntı ve her işlem için bu işi yapmak elbette çok zaman alır ve üstelik gereksiz olabilir. Bu nedenle, bir küme üzerindeki yapılar, sahip oldukları özeliklere göre belirli türlere ayrılır. Sonra her bir türün bütün özelikleri incelenir. Böylece, bir başka küme üzerinde bu türden bir yapı varsa, onu ayrıca incelemeye gerek kalmaz; o yapının da birincide bulunan özeliklere sahip olduğu hemen söylenebilir.

Matematik yapıları bu kitapta incelemeyi amaçlamadığımızı söylemiştik. Zaten bütün yapıları sınıflandırmak da olanaksızdır. Ama konunun daha somut olarak anlaşılabilmesi için temel cebirsel yapıların tanımlarını yermeyi yararlı görüyoruz.

13.2.1 Cebirsel Yapılar

Grup

Tanım 13.2.1. Bir G kümesi üzerinde $\oplus$ işaretiyle göstereceğimiz bir ikili işlem tanımlı olsun. Eğer bu işlem *grup aksiyomları* denilen aşağıdaki özeliklere sahipse $(G, \oplus)$ yapısına bir *grup,* denilir.

- [G1] İşlem birleşme özeliğine sahiptir.

- [G2] İşleme göre G nin birim öğesi vardır.

- [G3] G nin her öğesinin bu işleme göre bir ters öğesi vardır.

  Ayrıca aşağıdaki özelik de sağlanıyorsa $(G, \oplus)$ yapısına değişmeli (komutatif) bir gruptur, denilir.

- [G4] İşlem yer değiştirme özeliğine sahiptir.

Değişmeli grupları ilk inceleyen Norveçli ünlü matematikçi *Niels Henrik Abel (1802-1829)* dir. Bu nedenle, bu tür gruplara çoğunlukla *abel grupları* denilir. Örneğin, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi $+$ (toplama) işlemine göre bir abel grubudur.

Halka

Tanım 13.2.2. Bir H kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\otimes$ işaretleriyle göstereceğimiz iki tane ikili işlem tanımlı olsun. Eğer bu işlemler *halka aksiyomları* diyeceğimiz aşağıdaki üç özeliğe sahipse $(H, \oplus, \otimes)$ yapısına bir *halka* denilir.

- [H1] $(H, \oplus)$ bir abel grubudur.

- [H2] $\otimes$ işlemi birleşme özeliğine sahiptir.

- [H3] $\otimes$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özeliği vardır.

  Bu üç özelik ile birlikte

- [H4] $\otimes$ işlemine göre H nın birim öğesi var.

  aksiyomu da sağlanıyorsa, $(H, \oplus, \otimes)$ halkasına *birim öğeli halka* ya da, kısaca, *birimli bir halka*, denilir.

  İlk üç özelik ile birlikte

- [H5] $\otimes$ işlemi yer değiştirme özeliğine sahiptir,

aksiyomu da sağlanıyorsa, bu halkaya *değişmeli bir halkadır*, denilir.

Yukarıdaki beş özeliği sağlayan bir halkaya *birimli ve değişmeli bir halkadır*, denilir.

Örneğin, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi $+$ (toplama) ve $\cdot$ (çarpma) işlemlerine göre *birim öğeli ve değişmeli* bir halkadır.

Cisim

Tanım 13.2.3. Bir F kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\otimes$ işaretleriyle göstereceğimiz iki tane ikili işlem tanımlı olsun. Eğer bu işlemler *cisim aksiyomları* diyeceğimiz aşağıdaki iki özeliğe sahipse $(F, \oplus, \otimes)$ yapısına bir *cisim*, denilir.

- [C1] $(F, \oplus, \otimes)$ birimli ve değişmeli bir halkadır.
- [C2] F kümesinden $\oplus$ işleminin birim öğesi atılınca, geri kalan küme $\otimes$ işlemine göre bir abel grubudur.

Örneğin, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ rasyonel sayılar kümesi bir cisimdir.

Vektör Uzayları

Tanım 13.2.4. F bir cisim, $(V, +)$ bir abel grubu ve e öğesi, F nin çarpma işlemine göre birim öğesi olsun. Eğer $F \times V$ den V ye aşağıdaki koşulları sağlayan ve adına *sayıl çarpım (sayıyla çarpma, skalerle çarpma)* denilen bir

$$(s, v) \longmapsto sv \tag{13.2}$$

işlemi tanımlanmışsa, V ye F cismi üzerinde bir *vektör uzayı*, denilir.

Her $s, t \in F$ ve her $u, v \in V$ için

(i) $s(v + u) = sv + su$

(ii) $(s + t)v = sv + tv$

(iii) $s(tv) = (st)v$

(iv) $ev = v$

Sayı kümelerinden gelen bir alışkanlıkla, F cisminin öğelerine *sayı*, V vektör uzayının öğelerine de *vektör* diyeceğiz. İşlemlerde basitliği sağlamak için, bir v vektörünün s sayısıyla sayıl çarpımını sv ile gösteriyoruz.

Örnek 13.2.1. $[0, 1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı bütün gerçel değerli ve sürekli fonksiyonların oluşturduğu kümeyi $\mathcal{C} = \mathcal{C}[0, 1]$ ile gösterelim. $\mathcal{C}[0, 1]$ kümesi üzerinde fonksiyonların toplama işlemi

$$(f, g) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \Longrightarrow [(f, g) \longmapsto [f + g]]$$
$$x \in [0, 1] \Longrightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

biçiminde tanımlanır.

Benzer olarak, $\mathcal{C}[0, 1]$ kümesi üzerinde fonksiyonların sayıl çarpım işlemi

$$(sf) \in \mathcal{F} \times \mathcal{C} \Longrightarrow [(s, f) \longmapsto sf]$$
$$x \in [0, 1] \Longrightarrow (sf)(x) = sf(x)$$

biçiminde tanımlanır.

$\mathcal{C}[0, 1]$ kümesi, anılan bu toplama ve sayıl çarpım işlemlerine göre bir vektör uzayıdır.

Örnek 13.2.2. U ile V aynı F cismi üzerinde birer vektör uzayı olsunlar. Her $x, y \in U$ ve her $s, t \in F$ için, bir $f : U \to V$ fonksiyonu

$$f(sx + ty) = sf(x) + tf(y) \tag{13.3}$$

koşulunu sağlıyorsa, f ye U dan V ye ***doğrusal (lineer)*** bir dönüşümdür, denilir. U dan V ye olan bütün doğrusal dönüşümlerin kümesini $\mathcal{L} = \mathcal{L}(U, V)$ ile gösterelim. $\mathcal{L}$ kümesi üzerinde ***toplama*** işlemini $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ den $\mathcal{L}$ ye

$$\begin{aligned} (f, g) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} &\Longrightarrow [(f, g) \longmapsto [f + g]] \\ x \in U &\Longrightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıyoruz.

Benzer olarak, $\mathcal{L}$ kümesi üzerinde ***sayıl çarpım*** işlemini $F \times \mathcal{L}$ den $\mathcal{L}$ ye

$$\begin{aligned} (s, g) \in F \times \mathcal{L} &\Longrightarrow [(s, f) \longmapsto sf \\ x \in U &\Longrightarrow (sf)(x) = sf(x) \end{aligned}$$

diye tanımlıyoruz.

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(U, V)$ bir vektör uzayıdır.

Örnek 13.2.3. Örnek 13.2.2 deki $\mathcal{L}(U, V)$ vektör uzayının öğeleri arasından bütün bbö olanların kümesini $\mathcal{B} = \mathcal{B}(U, V)$ ile gösterelim. Aynı işlemlere göre $\mathcal{B}$ kümesi $\mathcal{L}$ nin bir alt vektör uzayıdır.

Örnek 13.2.4. Örnek 13.2.3 deki $\mathcal{B}(U, V)$ vektör uzayında $V = U$ alınırsa, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(U, U)$ kümesi U dan U ya tanımlı bütün bbö doğrusal dönüşümlerin oluşturduğu küme olur. Aynı işlemlere göre $\mathcal{D}$ kümesi bir vektör uzayıdır.

Örnek 13.2.5. Örnek 13.2.4 deki $\mathcal{D} = \mathcal{D}(U, U)$ vektör uzayında, bileşke işlemi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

diye tanımlanıyor. $(\mathcal{D}, +, \circ)$ yapısı bir halkadır.

Cebir

Tanım 13.2.5. V kümesi F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $V \times V$ den V ye aşağıdaki koşulları sağlayan (toplama $(+)$ ve sayıl çarpım işlemlerine ek) üçüncü bir

$$(u, v) \longmapsto u * v \tag{13.4}$$

işlemi tanımlanmışsa, V ye F cismi üzerinde bir *cebir*, denilir.

(i) Her $s \in F$ ve her $u, v \in V$ için

$$s(u * v) = (su) * v = u * (sv)$$

(ii) $(V, +, *)$ bir halkadır.

13.2.2 Sıra Yapıları

Tanım 13.2.6. X herhangi bir küme olsun. Eğer $\preccurlyeq$ bağıntısı X üzerinde bir tikel (kısmî) sıralama bağıntısı ise

$$(X, \preccurlyeq) \tag{13.5}$$

bir sıralama yapısıdır. Sıralama bağıntılarının türlerini önceden incelemiştik.

Örneğin, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi $\leq$ bağıntısına göre bir *tam sıralama yapısı* oluşturur.

Kafes

$(K, \preccurlyeq)$ tikel sıralanmış bir sistem olsun. Eğer her $a, b \in K$ için iki öğeli $\{a, b\}$ kümesinin en küçük üst sınırı (sup) ile en büyük alt sınırı (inf) var iseler, $(K, \preccurlyeq)$ tikel sıralanmış sistemine bir *kafes* denilir. $\{a, b\}$ kümesinin en küçük üst sınırı, varsa, $a \vee b$ simgesiyle, en büyük alt sınırı ise $a \wedge b$, simgesiyle gösterilir.

13.2.3 PROBLEMLER

1. A herhangi bir küme olsun. A dan A ya bbö bütün fonksiyonların kümesi $\mathcal{F}$ olsun. Fonksiyonların bileşkesi işlemine göre $\mathcal{F}$ nin bir grup olduğunu gösteriniz. Bu grup bir abel grubu olabilir mi?

2. $[0, 1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı bütün gerçel değerli ve sürekli fonksiyonların oluşturduğu $\mathcal{C}[0, 1]$ kümesinin Örnek 13.2.1 ile tanımlanan toplama ve sayıl çarpım işlemlerine göre bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

3. `Örnek` 13.2.2 ile tanımlanan $(\mathcal{L}, +)$ bir gruptur. Gösteriniz.

4. $(\mathcal{L}, +)$ bir bir vektör uzayıdır. Gösteriniz.

5. `Örnek` 13.2.2 de $V = U$ konulursa, U vektör uzayından kendisine tanımlı olan $\mathcal{L} = \mathcal{L}(U, U)$ kümesi çıkar. Bunun, aynı işlemlere göre bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

6. Önceki problemdeki $\mathcal{L} = \mathcal{L}(U, U)$ uzayı içinde bütün bbö doğrusal dönüşümlerden oluşan $\mathcal{B} = \mathcal{B}(U, U)$ kümesi, aynı işlemlere göre bir alt vektör uzayıdır. Gösteriniz.

7. $\mathcal{B} = \mathcal{B}(U, U)$ kümesi üzerinde bileşke işlemi
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
diye tanımlanıyor. $(\mathcal{B}, +, \circ)$ yapısı bir halkadır. Gösteriniz.

8. $(\mathcal{B}, +, \circ)$ yapısı bir cebirdir. Gösteriniz.

9. Bir X kümesinden gerçel sayılar kümesine tanımlı bütün fonksiyonların $\mathbb{R}^X$ kümesi üzerinde, toplama, noktasal çarpma ve sayıl çarpım işlemleri, sırasıyla, her $f, g \in \mathbb{R}^X$, her $x \in X$ ve her $s \in \mathbb{R}$ için

(i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

(ii) $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

(iii) $(sg)(x) = sf(x)$

şeklinde tanımlanıyor. $\mathbb{R}^X$ in bu işlemlere göre bir cebir olduğunu gösteriniz.

13.3 YAPI KORUYAN DÖNÜŞÜMLER

Uygulamada, bir küme üzerindeki yapıyı bozmadan başka bir küme üzerindeki yapıya dönüştürmek problemiyle sık sık karşılaşırız. Başka bir deyişle özeliklerini koruyarak yapıları birbirine dönüştüren fonksiyonlar ararız.

Tanım 13.3.1. X kümesi üzerinde bir α bağıntısı ile Y kümesi üzerinde bir β bağıntısı verilmiş olsun. Eğer α ile β bağıntılarının her ikisi de $m - li \quad (m = 1, 2, ...)$ birer bağıntı ve aynı özeliklere sahipse, bunlara *türdeş bağıntılar*, diyeceğiz.

Tanım 13.3.2. X ile Y kümeleri üzerinde, sırasıyla, α ile β türdeş birer bağıntı olsun ve bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) \in X^m$ için

$$\alpha(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) \Rightarrow \beta(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_m)) \tag{13.6}$$

oluyorsa, f fonksiyonu X üzerindeki α bağıntısını Y üzerindeki β bağıntısına dönüştürüyor, diyeceğiz.

Tanım 13.3.3.

$$(X, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \tau) \tag{13.7}$$

$$(Y, \alpha', \beta', \gamma', \ldots, \tau') \tag{13.8}$$

yapıları verilmiş olsun. Eğer α ile α', β ile β' ,..., τ ile τ' türdeş birer bağıntı ise (13.7) ile (13.8) yapılarına *türdeş iki yapıdır*, diyeceğiz.

Tanım 13.3.4. (13.7) ile (13.8) aynı türden iki yapı olsun ve bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer bu fonksiyon α yı α' ye, β yı β' ye, ..., τ yu τ' ye dönüştürüyorsa, f fonksiyonuna bir *benzerlik dönüşümü (homomorphism)*, ya da *benzer yapı dönüşümü*, denilir.

Tanım 13.3.5. Aynı türden iki yapı arasında bir benzer yapı dönüşümü varsa, bu yapılara *benzer yapılar (homomorph)*, diyeceğiz.

Tanım 13.3.6. Bire-bir-örten (bbö) benzerlik dönüşümüne *eşyapı dönüşümü (isomorphism , eşyapı resmi)*, diyeceğiz.

Tanım 13.3.7. Aynı türden iki yapı arasında bir eşyapı dönüşümü varsa, bu yapılara *eşyapılı (isomorph)*, diyeceğiz.

13.3.1 Sıra Koruyan Dönüşümler

$(A, \preceq)$ ile $(B, \lessapprox)$ tikel (kısmî) sıralanmış iki sistem olsun ve $f : A \to B$ fonksiyonu verilsin. Her $x, y \in A$ için

$$x \preceq y \Rightarrow f(x) \lessapprox f(y) \tag{13.9}$$

oluyorsa $f : A \to B$ fonksiyonuna ***sıra korur bir dönüşüm***, diyeceğiz. Bu tür dönüşümler, tanım uyarınca benzerlik dönüşümleridir. Bunlara *azalmayan fonksiyonlar* da denilmektedir. Yukarıdaki koşul yerine, her $x, y \in A$ için

$$x \prec y \Rightarrow f(x) < f(y) \tag{13.10}$$

özeliği sağlanıyorsa $f : A \to B$ dönüşümüne ***artan bir fonksiyondur*** denilir.

A dan B ye sıra korur bir dönüşüm varsa, A ile B nin ***sıra yapıları birbirine benzer*** ya da, kısaca, A ile B ***benzer sıralıdır***, diyeceğiz.

13.3.2 Eşsıralılık

$f : A \to B$ fonksiyonu bbö ve sıra korur bir dönüşüm ise f ye A dan B ye eşsıra dönüşümü (order isomorphism) , diyeceğiz. A dan B ye böyle bir dönüşüm varsa A ile B ye ***eşsıralı***, denilir. A ile B eşsıralı iseler, bunu $A \cong B$ simgesiyle belirteceğiz. Eğer A dan B ye eşsıra dönüşümü f ise ve ayrıca bunu da belirtmek gerekiyorsa

$$A \overset{f}{\cong} B \quad \text{ya da} \quad f : A \cong B \tag{13.11}$$

yazacağız.

Önerme 13.3.1. *$(A, \preceq)$ ile $(B, \lessapprox)$ tikel (kısmi) sıralanmış iki sistem olduğunda A ile B nin eşsıralı olması için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in A$ için*

$$x \preceq y \iff f(x) \lessapprox f(y) \tag{13.12}$$

özeliğini sağlayan bir $f : A \to B$ bbö fonksiyonunun varolmasıdır.

İSPAT:

Gerekliği: A ile B eşsıralı iseler, tanım gereğince, (13.9) özeliğine sahip bir $f : A \to B$ bbö fonksiyonu vardır; yani (13.12) ifadesinde sağa doğru gerektirme vardır. Sola doğru gerektirmenin de varlığını görmek için $f(x) \lessapprox f(y)$ koşulunu sağlayan $x, y \in A$ öğelerini düşünelim. Eğer $x \succ y$ olsaydı,

$$\begin{aligned} y \prec x &\Rightarrow y \preceq x \wedge x \neq y \\ &\Rightarrow f(y) \lessapprox f(x) \wedge f(x) \neq f(y) \\ &\Rightarrow f(y) < f(x) \end{aligned}$$

den bir çelişki doğardı. Bu çelişki olamayacağına göre $y \prec x$ kabulümüz yanlıştır; yani

$$f(x) \lessapprox f(y) \Rightarrow x \preceq y$$

dir.

Yeterliği:

(13.12) koşulunu sağlayan bir $f : A \to B$ bbö fonksiyonu varsa, bu fonksiyon eşsıralılık tanımı gereğince, A dan B ye bir *eşsıra* dönüşümüdür.

Uyarı 13.3.1. $(A, \preceq)$ ile $(B, \lessapprox)$ tikel (kısmî) sıralanmış iki sistem olsun. A ile B nin eşsıralı olması için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in A$ için

$$x \prec y \Longleftrightarrow f(x) < f(y) \tag{13.13}$$

özeliğini sağlayan bir $f : A \to B$ bbö fonksiyonunun varolmasıdır.

İSPAT :

Gerekliği: A ile B eşsıralı iseler (13.12) özeliğine sahip bir $f : A \to B$ bbö fonksiyonu vardır. Buradan

$$\begin{aligned} x \prec y &\Rightarrow (x \preceq y) \wedge (x \neq y) \\ &\Rightarrow (f(x) \lessapprox f(y)) \wedge (f(x) \neq f(y)) \\ &\Rightarrow f(x) < f(y) \end{aligned}$$

çıkar. *Yeterliği:* A dan B ye (13.13) özeliğine sahip ve bbö bir f fonksiyonu verilsin. Öyleyse

$$\begin{aligned} x \preceq y &\Leftrightarrow (x \prec y) \vee (x = y) \\ &\Leftrightarrow (f(x) < f(y)) \vee (f(x) = f(y)) \\ &\Leftrightarrow f(x) \lessapprox f(y) \end{aligned}$$

olur, ki bu, Önerme 13.3.1 gereğince, f nin A dan B ye bir eşsıra dönüşümü olması demektir.

Önerme 13.3.2. *$(A, \preceq)$ ile $(B, \lessapprox)$ tikel (kısmî) sıralanmış iki sistem olsun. A ile B nin eşsıralı olması için gerekli ve yeterli koşul kendisi ve tersi artan birer dönüşüm olan bir $f : A \to B$ fonksiyonunun var olmasıdır.*

İSPAT:

Gerekliği: A ile B eşyapılı iseler, (13.13) özeliğine sahip bir $f : A \to B$ bbö fonksiyonu vardır. f fonksiyonu bbö olduğundan , $f^{-1} : B \to A$ ters fonksiyonu vardır ve bu da bbö dir. Ayrıca, her $x \in A$ için

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

dir. Buradan ve (13.13) den

$$\begin{aligned} f(x) < f(y) &\Rightarrow x \prec y \\ &\Rightarrow f^{-1}(f(x)) \prec f^{-1}(f(y)) \end{aligned}$$

çıkar. f örten olduğundan, bu sonuncu, f^{-1} tersinin artan bir dönüşüm olması demektir.

Yeterliği: $f : A \to B$ ile bunun tersi $f^{-1} : B \to A$ artan birer fonksiyon olsunlar, f^{-1} tersi var olduğundan $f : A \to B$ bbö dir. Öyleyse bu fonksiyon eşsıralılık tanımının koşullarını sağlar.

13.4 Problemler

1. Aynı cisim üzerinde tanımlı iki vektör uzayının türdeş iki yapı olduğunu görünüz.
2. Örnek 13.2.2 ile tanımlanan $\mathcal{L}(U, V)$ uzayına ait her doğrusal dönüşümün U dan V ye bir benzerlik dönüşümü olduğunu gösteriniz.
3. $\mathcal{B}(U, V)$ ye ait her doğrusal dönüşümün U dan V ye bir eşyapı dönüşümü olduğunu gösteriniz.
4. $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}/6$ kümesinde tanımlı $\otimes$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine dağılma özeliği olduğunu gösteriniz.
5. $\mathbb{Z}_6$ kümesinde tanımlı $\oplus$ işlemine göre birim öğenin $\overline{0}$ olduğunu gösteriniz.
6. $\mathbb{Z}_6$ kümesinde tanımlı $\otimes$ işlemine göre birim öğenin $\overline{1}$ olduğunu gösteriniz.
7. $\mathbb{Z}_6$ kümesinde tanımlı $\oplus$ işlemine göre bütün öğelerin terslerini bulunuz.
8. $\mathbb{Z}_6$ kümesinde tanımlı $\otimes$ işlemine göre, $\overline{1}$ ve $\overline{5}$ den farklı öğelerin terslerinin olmadığını gösteriniz.
9. $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ sisteminin birer değişmeli grup olduğunu gösteriniz.
10. $(\mathbb{Z}_6, \otimes)$ sisteminin bir grup olmadığını gösteriniz.
11. $(\mathbb{Z}_5, \otimes)$ sisteminin bir grup olmadığını gösteriniz.
12. $((\mathbb{Z}_5) \setminus 0), \otimes)$ sisteminin bir grup olduğunu gösteriniz.
13. $((\mathbb{Z}_6) \setminus 0), \otimes)$ sisteminin bir grup olmadığını gösteriniz.
14. m bir sayma sayısı ise, $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ sisteminin değişmeli bir grup olduğunu gösteriniz.
15. p asal bir sayı ise, $((\mathbb{Z}/p) \setminus 0), \otimes)$ sisteminin değişmeli bir grup olduğunu gösteriniz.
16. A kümesinde tanımlı bir $\star$ işlemi verilsin. $a, b \in A, a \neq 0, b \neq 0$ için, $a \star b = 0$ oluyorsa a ile b ye $\star$ işleminin *"sıfır bölenleri"* denilir. $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_9$ kümelerinde $\times$ işleminin sıfır bölenlerini bulunuz.
17. Sayı kümeleri üzerinde 0 (sıfır) ın çarpmaya göre tersi yoktur. Niçin?