Bölüm 12

FONKSİYONLARLA YAPILAN İŞLER

12.1 BİLEŞKE

İKİ FONKSİYONUN BİLEŞKESİ

Bileşke kavramını basitçe anlatmak için bir örnekle başlayalım.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f : x \to 2x$$

fonksiyonu ile

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g : y \to y + 1$$

fonksiyonlarını, arka arkaya uygularsak, bir x öğesinin görüntüsünü

$$x \quad \xrightarrow{f} \quad 2x \quad \xrightarrow{g} \quad 2x + 1$$

biçiminde yazabiliriz.

Bu olgu bileşke fonksiyonunun temelidir. Bir fonksiyonun görüntüsüne başka bir fonksiyonu uygulamak; onun görüntüsüne de başka bir fonksiyonu uygulamak, ...

Tanım 12.1.1. $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon olsun ve $g : Y \to Z$ fonksiyonu verilsin. $y = f(x),\ z = g(y)$ olmak üzere, ard arda yapılan

$$x \leadsto y \leadsto z \tag{12.1}$$

gönderimlerini birleştirerek tek bir gönderim imiş gibi düşünürsek

$$x \leadsto z \tag{12.2}$$

gönderimi ortaya çıkar. Bu gönderim, önceki iki gönderimin bileşkesidir. Bu bileşkeyi fonksiyon simgeleriyle şöyle yazabiliriz.

$$h : X \to Z; \quad (x \in X \Rightarrow h(x) = z = g(f(x)) \tag{12.3}$$

Buradaki h fonksiyonuna, f ile g fonksiyonlarının ***bileşke fonksiyonu*** denilir ve

$$h = g \circ f$$

biçiminde gösterilir.

Bunu " g *bileşke* f" diye okuyacağız. $g \circ f$ yazılışında sıra önemlidir: Önce f fonksiyonu, sonra g fonksiyonu uygulanacak demektir. Tabii,

$$g \circ f : X \to Z \tag{12.4}$$

dir. (1) ifadesini, bağıntı gösterimleri ile de ifade edebiliriz:

Tanım 12.1.2. $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon, $g : Y \to Z$ herhangi bir fonksiyon olsun. $f = (X, Y, G_f)$ bağıntısı ile $g = (X, Y, G_g)$ bağıntılarının bileşkesine f ile g fonksiyonlarınının ***bileşke fonksiyonu*** denilir ve $g \circ f$ simgesiyle gösterilir. Bileşke bir fonksiyon olduğu için, onu da bir fonksiyon simgesiyle gösterebiliriz: $h = g \circ f$; yani

$$H = g \circ f : X \to Z \tag{12.5}$$

dir.

Bileşkenin eşdeğer tanımını, bileşen fonksiyonların grafiklerini kullanarak da yapabiliriz.

Tanım 12.1.3. $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon olsun ve $g : Y \to Z$ fonksiyonu verilsin.

$$(x, y) \in f \ \wedge \ (y, z) \in g \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in g \circ f \tag{12.6}$$

fonksiyonu, f ile g bağıntılarının bileşkesidir.

$$(g \circ f) : X \to Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \tag{12.7}$$

olur.

12.1.1 Bileşke İşleminin Özelikleri

Gereksiz tekrardan sakınmak için, bundan böyle, $g \circ f$ yazdığımızda, f nin örten olduğunu; $h \circ g \circ f$ yazdığımız da da f ile g nin örten olduğunu varsayacağız. Fonksiyonların sayısal değerlerinin verildiği yerler bunun dışındadır.

Yer Değişim Özeliği Yoktur

Bileşke işlemi yer değişim (komutatiflik) özeliğini sağlamaz.

Bunu bir örnek üzerinde görebiliriz.

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye $f(x) = 2x$ ve $g(y) = y + 7$ fonksiyonları verilsin. $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını ayrı ayrı yazalım:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \quad \text{(bileşke tanımı)} \\ &= g(2x) \quad (f \text{ nin kuralı}) \\ &= (2x) + 7 \quad (g \text{ nin kuralı}) \\ &= 2x + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \quad \text{(bileşke tanımı)} \\ &= f(x + 7) \quad (g \text{ nin kuralı}) \\ &= 2(x + 7) \quad (f \text{ nin kuralı}) \\ &= 2x + 14 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\left.\begin{aligned} (f \circ g)(x) = 2x + 14 \\ (g \circ f)(x) = 2x + 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

olur. O halde,

$$f \circ g \neq g \circ f \tag{12.8}$$

dir.

Uyarı: Bazı özel hallerde, $f \circ g = g \circ f$ eşitliği sağlanabilir; ancak bu genel eşitsizlik kuralını bozmaz.

Birleşme Özeliği

Bileşke işleminin *birleşme özeliği* (asositatiflik) vardır.

$$f \to B, \quad g : B \to C, \quad h : C \to D$$

fonksiyonlarından ilk ikisi örten ise,

$$\begin{aligned} [h \circ (g \circ f)](x) &= h[(g \circ f)(x)] \\ &= h[g(f(x))] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} [(h \circ g) \circ f](x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h[g(f(x))] \end{aligned}$$

olur. Yani,

$$[h \circ (g \circ f)](x) = [(h \circ g) \circ f](x) = h[g(f(x))]$$

eşitliği vardır.

O halde fonksiyonlar kümesi üzerinde bileşke işleminin *birleşme özeliği* vardır.

Sadeliği sağlamak için, parantezleri kaldırıp,

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = f \circ g \circ h \tag{12.9}$$

yazabiliriz.

Birim Fonksiyon

Önerme 12.1.1. *A kümesinden kendisine tanımlı fonksiyonlar kümesi içindeki özdeşlik fonksiyonu, bileşke işlemine göre* birim (etkisiz) *öğedir.*

İSPAT: A boş olmayan bir küme olmak üzere,

$$I : A \to A, \quad I(x) = x \tag{12.10}$$

fonksiyonuna birim (özdeşlik) fonksiyon demiştik. Herhangi bir $f : A \to A$ fonksiyonu ile I özdeşlik fonksiyonunun bileşkesini düşünelim.

$$\begin{aligned} (I \circ f)(x) &= I(f(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (f \circ I)(x) &= f(I(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

dir. O halde

$$f \circ I = I \circ f = f \tag{12.11}$$

olur. Bu istenen eşitliktir.

12.2 TERS FONKSİYON

BIR FONKSIYONUN TERSI

Tanım 12.2.1. $f : X \to Y$ fonksiyonunu $f = (X, Y, G_f)$ bağıntısı olarak düşünürsek,

$$f^{-1} = (Y, X, G_f^{-1}) \tag{12.12}$$

ters bağıntısı, f fonksiyonunun tersidir.

f fonksiyonunun f^{-1} ters bağıntısının bir fonksiyon olma koşullarını sağlamayabilir; yani bir fonksiyon olmayabilir.

Tanım 12.2.2. f fonksiyonunun f^{-1} ters bağıntısı fonksiyon olma koşullarını sağlıyor ise, f^{-1} ters bağıntısına f fonksiyonunun *ters fonksiyonu* denilir. Bu durum varsa, f fonksiyonuna *tersinebilir* bir fonksiyondur diyoruz.

Bu durumu

$$f^{-1} : Y \to X \tag{12.13}$$

simgesiyle göstereceğiz.

f fonksiyonunun f^{-1} ters bağıntısı fonksiyon olma koşullarını sağlamıyorsa, f fonksiyonuna *tersinemez* bir fonksiyondur diyoruz. f fonksiyonu tersinemez bir fonksiyon ise, f^{-1} yalnızca Y den X kümesine bir bağıntı olma işlevine sahiptir.

Fonksiyonlar ile grafikleri bire-bir eşlenebilir; yani her fonksiyonun bir tek grafiği vardır; her grafik bir tek bağıntıya (fonksiyona) aittir. Bu nedenle, fonksiyonlarla ilgili özelikleri grafiklerinden de çıkarabiliriz. Buna göre, yukarıda söylediklerimizi grafiklerle yeniden ifade edebiliriz:

Önerme 12.2.1.

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\} \tag{12.14}$$

ters bağıntısının bir fonsiyon olması için gerekli ve yeterli koşul

$$f = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\} \tag{12.15}$$

fonksiyonunun bire-bir-örten olmasıdır.

Önerme 12.2.2. *Önceki önermenin varsayımı altında , f^{-1} de bire bir örten bir fonsiyondur:*

$$f : X \to Y,\ f(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1} : Y \to X,\ f^{-1}(y) = x \tag{12.16}$$

Önerme 12.2.3. *$f^{-1} : Y \to X$ ters fonksiyonunun varolması için gerekli ve yeterli koşul, $f : A \to B$ fonksiyonunun bire bir ve örten olmasıdır.*

İSPAT:

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$

bağıntısından,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

yazılabilir.

12.3 KÜMELER AİLESİ

12.3.1 Kümeler Ailesinin Kartezyen Çarpımı

Önceki bölümlerde iki ya da sonlu sayıda kümenin kartezyen çarpımını tanımlamıştık. Anımsanacağı üzere $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümelerinin kartezyen çarpımı n-sıralılardan oluşan

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots a_n) \,|\, a_i \in A_i,\ 1 \leq i \leq n\} \tag{12.17}$$

varlık olarak tanımlamıştık.

Şimdi bu kavramı herhangi bir kümeler *ailesinin kartezyen çarpımı* kavramına genelleştireceğiz. Bunun için önce (12.17) in öğeleri olan n-sıralıları $I = \{l, 2, ..., n\}$ kümesinden $A = \cup_{i \in I} A_i$ kümesine bir fonksiyon olarak düşünebileceğimizi gösterelim. Gerçekten herhangi bir

$$(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \tag{12.18}$$

öğesine karşılık

$$a : I \to A;\ \forall i(i \in I) \text{ için } a(i) = a_i \tag{12.19}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Başka bir

$$(b_1, b_2, \ldots b_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \tag{12.20}$$

öğesi seçersek

$$b : I \to A;\ \forall i(i \in I) \text{ için } b(i) = b_i \tag{12.21}$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz. (12.19) ve (12.21) ifadelerinden hemen görüleceği gibi a ile b fonksiyonlarının eşit olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ ile $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ öğelerinin eşit olmasıdır; yani

$$a = b \Longleftrightarrow (a_1, a_2, \ldots a_n) = (b_1, b_2, \ldots b_n) \tag{12.22}$$

olmasıdır. Öyleyse (12.17) kartezyen çarpımının her öğesine karşılık (12.19) şeklinde tanımlanan bir tek fonksiyon vardır. Bu fonksiyonun belirtgen özeliği

$$\forall i(i \in I) \Rightarrow a(i) \in A_i \tag{12.23}$$

olmasıdır.

Tersine olarak bu özeliği sağlayan her $a : I \to A$ fonksiyonunun değer bölgesi $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ kümesidir. Bu küme (12.17) kartezyen çarpımının $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ öğesinin bileşenlerinden oluşmaktadır. Şuhalde (12.19) şeklindeki her fonksiyon (12.18) şeklinde bir öğeyi belirler.

Demek ki (12.17) kartezyen çarpımının öğeleri ile (12.19) şeklindeki fonksiyonlar hire-bir eşlenebilir. Bu nedenle,

$$a = (a_1, a_2, \ldots a_n) \tag{12.24}$$

diyeceğiz. Bu anlaşma uyarınca, artık (12.17) kartezyen çarpımının öğelerini I damgalayan kümesinden A bileşim kümesine (12.24) koşulunu sağlayan fonksiyonlar olarak düşünebiliriz.

Artık I damgalayan kümesi ne olursa olsun, bu kavramı genelleştirebiliriz.

Tanım 12.3.1. Bir $= \{A_\imath \mid \imath \in I\}$ kümeler ailesi verilsin. Bu ailenin kartezyen çarpımı her $\imath \in I$ için $a(i) \in A_\imath$ koşulunn sağlayan

$$a : I \to \cup_{\imath \in I} A_\imath \tag{12.25}$$

fonksiyonlarının oluşturduğu kümedir.

Bunu daha açık yazarsak

$$\prod_{\imath \in I} A_\imath = \{a \mid a : I \to \bigcup_{\imath \in I} A_\imath,\ \forall \imath(\imath \in I \Rightarrow a(\imath) \in A_\imath)\} \tag{12.26}$$

olur. (12.24) in bir genellemesi olarak bazan $a \in \Pi_{\imath \in I} A_\imath$ öğesini (fonksiyounu), her $\imath \in I$ için $a(\imath) = a_\imath$ olmak üzere,

$$a = (a_\imath)_{\imath \in I} \tag{12.27}$$

şeklinde yazacağız. Burada her $j \in I$ için a_j öğesine a nın j-inci bileşeni denilir.

12.3.2 İzdüşüm

Yukarıdaki simgeler varsayılarak her $j \in I$ için

$$\pi_j : \prod_{\imath \in I} A_\imath \longrightarrow A_j\ ,\ \pi_j(a) = a_j \tag{12.28}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Tanım 12.3.2. (12.28) ile tanımlanan π_j fonksiyonuna $\Pi_{\imath \in I} A_\imath$ kartezyen çarpımından j-inci bileşen (konaç, koordinat) üzerine *izdüşüm* diyeceğiz.

Aşağıdaki özelikler kolayca ispatlanır.

Önerme 12.3.1. *I bir damga (index) kümesi olmak üzere her $\imath \in I$ için $A_\imath = A$ ise*

$$\prod_{\imath \in I} A_\imath = A^I \tag{12.29}$$

dır.

Önerme 12.3.2. *$\{A_i \mid i \in I\}$ ve $\{B_j \mid j \in J\}$ aileleri için*

$$\left(\prod_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\prod_{j \in J} A_j\right) = \prod_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cup B_j) \tag{12.30}$$

$$\left(\prod_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\prod_{j \in J} A_j\right) = \prod_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j) \tag{12.31}$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 12.3.3. A, B herhangi iki küme ise A dan B ye tanımlı olan bütün fonksiyonların oluşturduğu kümeyi

$$B^A = \{f | f : A \to B\} \tag{12.32}$$

simgesiyle göstereceğiz.

Önerme 12.3.3. *A, B, C herhangi üç küme ise*

$$A^C \cup B^C \subset (A \cup B)^C \tag{12.33}$$

$$A^C \cap B^C \subset (A \cap B)^C \tag{12.34}$$

$$A^C - B^C \subset (A - B)^C \tag{12.35}$$

bağıntıları sağlanır.

12.3.3 Çözülmüş Örnekler

Uyarı:

Burada ele alacağımız fonksiyonlar, aksi söylenmedikçe, $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesinden $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesine tanımlı varsayılacaktır. Dolayısıyla, tanım bölgesi belirtilmeden $y = f(x)$ bağıntısıyla verilen bir f fonksiyonunun tanım bölgesi, $f(x)$ değerlerinin var olduğu bütün x öğelerinin oluşturduğu kümedir. Tabii, f nin görüntü kümesi belirlenince, değer kümesi de belirlenmiş olacaktır.

1. $graf(f) = \{1, c)(2, b), (3, a), (4, d)\}$ ve $graf(g) = \{(a, 1), (b, 3), (c, 4), (d, 2)\}$ veriliyor. Grafikleri çiziniz. $g \circ f$ ile $f \circ g$ bileşke fonksiyonlarını yazınız. Bileşke fonksiyonların niteliklerini ortaya çıkarınız.

   Çözüm: f ve g fonksiyonlarının ok grafiklerini çiziniz. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere,

   $$f : A \to B, \quad f(1) = c,\ f(2) = b,\ f(3) = a,\ f(4) = d$$

   $$g : B \to A, \quad g(a) = 1,\ g(b) = 3,\ g(c) = 4,\ g(d) = 2$$

   dir. Her ikisi bire bir ve örtendir. Dolayısıyla, her ikisinin ters fonksiyonları vardır:

   $$graf(f^{-1}) = \{(a, 3),\ (b, 2),\ (c, 1),\ (d, 4)\}$$

   $$graf(g^{-1}) = \{(1, a),\ (2, d),\ (3, b),\ (4, c)\}$$

   Bileşke fonksiyonların tanımları aşağıda verilmiştir:

   $$g \circ f : A \to A, \quad g \circ f(1) = 4,\ g \circ f(2) = 3,\ g \circ f(3) = 1,\ g \circ f(4) = 2$$

   $$f \circ g : B \to B, \quad f \circ g(a) = c,\ f \circ g(b) = a,\ f \circ g(c) = d,\ f \circ g(d) = b$$

2. $y = f(x) = 3x+1$ fonksiyonunun, mümkün olan en büyük tanım bölgesini bulunuz. Değer bölgesini belirleyiniz. varsa, ters fonksiyonunu bulunuz.

   Çözüm: $y = f(x) = 3x+1$ bağıntısı her gerçek x için anlamlıdır. Dolayısıyla, f nin tanım bölgesi $\mathbb{R}$ dir.

$$(x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)) \Leftrightarrow (y_1 \neq y_2)$$

   olduğundan, fonksiyon bire birdir. Her $y \in \mathbb{R}$ için,

$$f\left(\frac{y-1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{y-1}{3} + 1 = y$$

   olduğundan, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ örten bir fonksiyondur. Dolayısıyla, f nin ters fonksiyonu vardır. Ters fonksiyonu bulmak için (8) bağıntısını kullanabiliriz:

$$\begin{aligned} y = f^{-1}(x) &\Leftrightarrow x = f(y) \\ &\Leftrightarrow x = 3y+1 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{x-1}{3} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3} \end{aligned}$$

3. $a \neq 0$ ile b sabit gerçek sayılar olmak üzere,

$$y = ax + b$$

   fonksiyonunun, mümkün olan en büyük tanım bölgesini bulunuz. Değer bölgesini belirleyiniz. varsa, ters fonksiyonunu bulunuz.

   Çözüm: Yukarıdaki sayısal örnekte yaptıklarımızın benzerini tekrarlayabiliriz. $y = f(x) = ax+b$ bağıntısı her gerçek x için anlamlıdır. Dolayısıyla, f nin tanım bölgesi $\mathbb{R}$ dir.

$$(x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)) \Leftrightarrow (y_1 \neq y_2)$$

   olduğundan, fonksiyon *bire-birdir.* Her $y \in \mathbb{R}$ için,

$$f\left(\frac{y-b}{a}\right) = 3 \cdot \frac{y-b}{a} + 1 = y$$

   olduğundan, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *örten* bir fonksiyondur. Dolayısıyla, f nin ters fonksiyonu vardır. Ters fonksiyonu bulmak için (8) bağıntısını kullanabiliriz:

$$\begin{aligned} y = f^{-1}(x) &\Leftrightarrow x = f(y) \\ &\Leftrightarrow x = ay+b \\ &\Leftrightarrow y = \frac{x-b}{a} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} \end{aligned}$$

O halde,

$$f(x) = ax + b \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$$

dir.

4. a, b, c, d sabit gerçek sayılar olmak üzere,

$$y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

fonksiyonunun, mümkün olan en büyük tanım bölgesini bulunuz. Değer bölgesini belirleyiniz. varsa, ters fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Verilen $y = f(x)$ bağıntısı, paydanın sıfır olmadığı her gerçek x için anlamlıdır. Dolayısıyla, f nin tanım bölgesi $cx + d \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{d}{c}$ olan gerçek sayılar kümesidir.

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} = \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d} \\
&\Leftrightarrow \quad (ax_1 + b)(cx_2 + d) = (cx_1 + d)(ax_2 + b) \\
&\Leftrightarrow \quad adx_1 + bcx_2 = bcx_1 + adx_2 \\
&\Leftrightarrow \quad ad = bc
\end{aligned}$$

dir. Buradan şunu söyleyebiliriz:

1. Durum: Eğer $ad = bc$ ise, verilen fonksiyon, $f(x) = \frac{a}{c}$ sabit fonksiyonudur. Görüntü kümesi, tek öğeli $\{\frac{a}{c}\}$ kümesidir. Fonksiyonun tersi yoktur.

2. Durum: Eğer $ad \neq bc$ ise, verilen fonksiyon, bire birdir. Görüntü kümesi üzerinde, ters fonksiyonu vardır. Ters fonksiyonu bulmak için (8) bağıntısını kullanabiliriz:

$$\begin{aligned}
y = f^{-1}(x) \quad &\Leftrightarrow \quad x = f(y) \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{ay + b}{cy + d} \\
&\Leftrightarrow \quad x(cy + d) = ay + d \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{-dx + b}{cx - a} \\
&\Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}
\end{aligned}$$

O halde, $ad \neq bc$ olduğunda,

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

olur. Buradan, görüntü kümesinin $cx - a \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{a}{c}$ koşulunu sağlayan gerçek x sayılarının oluşturduğu küme olduğu görülür.

5. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{1, 6, 11\}$ kümeleri ile $f : A \to B, \quad f(x) = 5x - 4$ fonksiyonu veriliyor.

   (a) f fonksiyonunun bire bir olduğunu gösteriniz.

   (b) f^{-1} ters fonksiyonunu bulunuz.

   (c) $f \circ f^{-1}$ ile $f^{-1} \circ f$ bileşke fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 6, \quad f(3) = 11$$

eşlemelerinden, f nin bire bir ve örten olduğu görülüyor. Ters fonksiyonu bulmak için, (8) bağıntısını kullanalım:

$$\begin{aligned} y = f^{-1}(x) \quad &\Leftrightarrow \quad x = f(y) \\ &\Leftrightarrow \quad x = 5y - 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x + 4 = 5y \\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{x+4}{5} \end{aligned}$$

Öyleyse,

$$f(x) = 5x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{x+4}{5}$$

dir.

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f = I_A : A \to A, &\quad (x \in A \Rightarrow I_A(x) = x \\ f \circ f^{-1} = I_B : B \to B, &\quad (y \in B \Rightarrow I_B(y) = y \end{aligned}$$

olduğu apaçıktır.

12.4 ALIŞTIRMALAR

1. Bire bir ve örten her fonksiyonun tersinin tersi, kendisine eşittir; yani,

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

eşitliği vardır. Gösteriniz.

2. f ile g fonksiyonlarının grafikleri,

   $graf(f) = \{(a, 4), (b, 3), (c, 1), (d, 2)\}$ ve

   $graf(g) = \{(1, b), (2, d), (3, a), (4, c)\}$

   olsun.

   (a) f fonksiyonunun tanım ve değer bölgelerini yazınız.

   (b) g fonksiyonunun tanım ve değer bölgelerini yazınız.

(c) f fonksiyonunun bire bir ve örten olduğunu gösteriniz.

(d) g fonksiyonunun bire bir ve örten olduğunu gösteriniz.

(e) f fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz.

(f) g fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz.

(g) $f^{-1} \circ f$ bileşkesini belirleyiniz.

(h) $f \circ f^{-1}$ bileşkesini belirleyiniz.

(i) $g^{-1} \circ g$ bileşkesini belirleyiniz.

(j) $g \circ g^{-1}$ bileşkesini belirleyiniz.

(k) $g \circ f$ bileşkesini belirleyiniz.

(l) $f \circ g$ bileşkesini belirleyiniz.

(m) $(g \circ f)^{-1}$ ters fonksiyonunu belirleyiniz.

(n) $f^{-1} \circ g^{-1}$ bileşke fonksiyonunu belirleyiniz.

(o) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ eşitliğini gösteriniz.

3. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ kümesi veriliyor. $f : A \to B, f(x) = 3x - 1$ ve $g : B \to C$, $g(x) = 2x + 5$ bire bir ve örten fonksiyonları tanımlanıyor.

   (a) B ve C kümelerini bulunuz.

   (b) $g \circ f : A \to C$ fonksiyonunu belirleyiniz.

   (c) $f, g, g \circ f$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

4. Her $f : A \to A$ örten bir fonksiyonu ise, kısalığı sağlamak için, ardışık bileşkeler,

$$f^2 = f \circ f, \quad f^3 = f \circ f \circ f, \quad f^4 = f \circ f \circ f \circ f \cdots$$

   biçiminde üstel ifadelerle gösterilir. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 5$ fonksiyonu veriliyor. I birim fomksiyon olmak üzere,

$$I = f^2 = f^2 = f^4 = f^6 = \cdots$$

   olduğunu gösteriniz.

5. $f^{-1}(x) = 2x + 3$ veriliyor. f fonksiyonunu belirleyiniz.

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 5$ fonksiyonu için $f^4(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x sayısını bulunuz.

7. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ve $B = \{0, 1, 4, 9\}$ kümeleri veriliyor.
   $f : A \to B, \quad f(x) = x^2$ fonksiyonunun tersi var mıdır? Neden?

8. $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi ile $f : A \to B$, $f(x) = 5x - 1$ bağıntısı veriliyor.

   (a) f nin bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

(b) f nin mümkün olan en büyük tanım bölgesini ve değer bölgesini belirleyiniz.

(c) f nin bire bir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

(d) f^{-1} ters fonksiyonunu belirleyiniz.

(e) $f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$ olduğunu örneklerle gösteriniz.

9. $f(x) = 3x + 1$ ve $g(x) = 2x$ fonksiyonları veriliyor.

   (a) f ile g nin mümkün olan en büyük tanım bölgelerini ve değer bölgelerini belirleyiniz.

   (b) $g \circ f$ bileşke fonksiyonunu belirleyiniz.

   (c) $f \circ g$ bileşke fonksiyonunu belirleyiniz.

   (d) $g \circ f \neq f \circ g$ olduğunu gösteriniz.

   (e) f^{-1} ters fonksiyonunu belirleyiniz.

   (f) g^{-1} ters fonksiyonunu belirleyiniz.

   (g) $f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$ olduğunu örneklerle gösteriniz.

   (h) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ olduğunu örneklerle gösteriniz.

10. $f(x) = 3x + 1$ fonksiyonu ile $B = \{1, 7, 10\}$ kümesi veriliyor. $f^{-1}(B)$ kümesini bulunuz.

11. $f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

12. $f(x) = 2\sqrt[3]{x} + 5$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

13. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ fonksiyonunun en büyük tanım bölgesini belirleyiniz. Ters fonksiyonunun olup olmadığını araştırınız.

14. $f(x) = \frac{1}{x}$, $(x \neq 0)$ fonksiyonunun tersinin kendisi ne eşit olduğunu; yani, $f(x) = f^{-1}(x)$, $(x \neq 0)$ eşitliğinin varlığını gösteriniz.

15. $f(x) = (x - 3)^3$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

16. $f(x) = -x + 3$, $\quad g(x) = x + 1$, $h(x) = 3x + 2$ fonksiyonları veriliyor. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ olduğunu gösteniniz.

17. $f(x) = ax + 1$ ve $f^{-1}(x) = f(x)$ ise $f^{-1}(1)$ kaçtır?

18. $f(x) = \frac{ax+2}{3x-1}$ ve $f^{-1}(x) = f(x)$ ise $f^{-1}(1)$ kaçtır?

19. $f(x) = \frac{3x-1}{2x-4}$ fonksiyonunun en büyük tanım kümesini ve varsa ters fonksiyonunu bulunuz.

20. $f(x) = (x + 1) \cdot f(x - 1)$ ve $f(1) = 5$ ise $f(4)$ kaçtır?

21. $f : A \to B$ fonksiyonu veriliyor. $f(x) = (x - 1) \cdot f(x + 1)$ ve $f(5) = 5$ ise $f(2)$ kaçtır?

22. $f(x) = 2x + 1$ ve $g \circ f(x) = 6x - 2$ ise $g(x)$ nedir?

23. $g(x) = 3x - 2$ ve $g \circ f(x) = 2x$ ise $f(x$ nedir?

24. $f(x - 2) = 3x + 1$ ve $A = \{-1, 0, 1\}$ ise $f(A)$ ve $f^{-1}(A)$ nedir?

25. $f(3x - 1) = x^2 - 3$ ise $f(x)$ nedir?

26. $f(x) = 3x + r$ ve $f^{-1}(3) = 1$ ise r kaçtır?

27. $A = \{-1, 1, 3\}$ ve $f(x) = 2x + 1$ ise $f^{-1}(A)$ nedir?

28. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 3}$ ise $f^{-1}(x)$ nedir?

29. $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinden kendisine tanımlı bire bir ve örten her fonksiyon, A nın bir permütasyonudur. Bir permütasyonu göstermek için, aşağıdaki gibi matrisler kullanılır. Bunun anlamı şudur: Üst satırdaki her öğe, kendi düşey sütununa karşılık gelen alt satırdaki öğeye eşlenir.

   (a) A nın bütün permütasyonlarının aşağıdaki fonksiyonlardan oluşan $\mathcal{P} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ kümesi olduğunu gösteriniz.

   (b) Bu permütasyonlar arasında, birbirlerinin tersi olanları belirleyiniz.

   (c) Permütasyonların bileşke işlemine göre kapalı olduğunu gösteriniz.

   (d) Bileşke işleminin yer değişim özeliğinin olmadığını gösteriniz.

   (e) Bileşke işleminin tablosunu yapınız ve özeliklerini inceleyiniz.

   (f) $(\mathcal{P}, \circ)$ sistemi bir grup mudur? Neden?

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak veriliyor. $\circ$ (bileşke) işlemi, a,ağıdaki gibi tanımlanır:

$$f_2 \circ f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f_5$$

30. Yukarıdaki tanımlara göre, $(f_3 \circ f_5)^{-1}$ hangi permütasyona eşittir?

31. Yukarıdaki tanımlara göre, $(f_5^{-1} \circ f_3^{-1})^{-1}$ hangi permütasyona eşittir?

32. Y kümesinden X kümesine tanımlı bütün fonksiyonların oluşturduğu küme X^Y ile gösterilir:

$$X^Y = \{f \mid f : Y \to X\} \tag{12.36}$$

$Y = \{1\}$ olarak alınırsa, $X^{\{1\}}$ kümesini belirleyiniz.