Bölüm 5

KÜMELER CEBİRİ

Doğa olaylarının ya da sosyal olayların açıklanması için, bazan, *matematiksel modelleme* yapılır. Bunu yapmak demek, incelenecek olaya etki eden etmenleri içine alan matematiksel formülleri ortaya koymak demektir. Bunların büyük çoğunluğu, sayısal işlemlerle yapılabilir. Ama bazı durumlarda, sayısal işlemlere benzemeyen işlemler gerekebilir. Bu farklı işlemlerden bir bölümü, *Kümeler Cebiri* kullanılarak yapılanlardır.

Sayılarda yaptığımız dört işlem, tek tek sayılarla uğraşır. İki sayı arasında yapılan toplama, çıkarma, bölme, çarpma, ... işlemleriyle yeni sayılar oluşturur. Kümeler Cebiri, sayılardaki dört işlemden farklı olarak, tek tek öğelerle değil, kümelerle uğraşır. İki küme arasındaki işlemlerle yeni kümeler oluşturur. Bu kavram, birçok modellemede kullanılır.

Hemen belirtelim ki, Matematik bir yönüyle, kesin kuralları olan bir dildir. Bir dilin alfabesini, ve dilbilgisini öğrenmeden, o dilde konuşmak ve düşünmek mümkün değildir. Matematiğin alfabesi simgeler, dilbilgisi ise tanımlar ve teoremlerdir. Dolayısıyla, Matematiği kavrayabilmek için, öncelikle, sayısı çok olmayan simgeleri öğrenmeliyiz. Tanım ve teoremler, bunu kolayca izleyecektir.

5.1 TEMEL KAVRAMLAR

Kapsama

A kümesinin her öğesi B kümesinin de bir öğesi ise, *"A kümesi, B kümesi tarafından kapsanır"* ya da *"B kümesi A kümesini kapsıyor,"* denilir ve $A \subset B$ simgesiyle gösterilir:

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B) \tag{1}$$

$A \subset B$ ile $B \supset A$ eş anlamda kullanılacaktır.

Özel olarak, A kümesi, yalnızca bir tek a öğesine sahipse, bu kümeyi $\{a\}$ ile gösterecek ve adına *tek öğeli küme* diyeceğiz. a bir öğedir, {a} ise bir kümedir. Dolayısıyla bu ikisi birbirlerinden farklıdır: $a \in \{a\}$.

Alt Küme ve Üst Küme

A kümesi B kümesi tarafından kapsanıyorsa "A kümesi B kümesinin bir *alt kümesi* dir," ya da "B kümesi A kümesi nin bir *üst kümesi* dir," diyeceğiz: $B \supset A$.

Eşit Kümeler

A kümesi B kümesini kapsıyor ve B kümesi de A kümesini kapsıyorsa, bu iki küme birbirine *eşittir,* denilir ve bu durum, $A = B$ simgesiyle gösterilir; yani,

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subset B) \wedge (B \subset A)] \tag{2}$$

dır.

Has Alt Küme

A kümesi, B kümesi tarafından kapsanıyorsa ve A ile B eşit değilseler, A kümesi B kümesi nin bir *has alt kümesi'*dir, diyecek ve

$$(A \subset B) \wedge (A \neq B) \tag{3}$$

biçiminde göstereceğiz.[1].

Buradan anlaşıldığı gibi, *A kümesi, B nin bir alt kümesidir,* denildiğinde, bu, A kümesinin B ye eşit olamayacağı anlamına gelmez. Örneğin, her küme kendi kendisinin bir alt kümesidir $A \subset A$. Neden?

Boş Küme

Hiçbir öğesi varolmayan kümeye, *boş küme* diyecek ve bunu $\emptyset$ simgesiyle ya da içi boş $\{ \}$ parantezi ile göstereceğiz.

Her küme boş kümeyi kapsar.

Kuvvet Kümesi

X boş olmayan bir küme olsun. X in bütün alt kümelerinden oluşan kümeye, X in kuvvet kümesi diyecek ve $\mathcal{P}(X)$ simgesiyle göstereceğiz.

Algılamayı kolaylaştırmak için, çoğunlukla, öğeleri kümeler olan kümelere, *kümeler ailesi* deriz.

Aşağıdaki önermenin ispatı ileride yapılabilecektir.

Önerme *n öğeli bir kümenin bütün alt kümelerinin sayısı 2^n dir.*

---

[1] **Uyarı:** Bazı kaynaklarda $A \subset B$ yerine $A \subseteq B$ simgesi ve $(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$ yerine de $A \subset B$ simgesi kullanılır. Tabii, bir kavramın hangi simgeyle gösterildiği, o kavrama etkimez; ama hangi kavram için hangi simgenin kullanıldığını daima bilmek ve tutarlı biçimde kullanmak gerekir. Biz, bu derste daima yukarıdaki tanımlarda geçen simgeleri kullanacağız.

5.2 KÜMELER ÜZERİNDE İŞLEMLER

Bileşim

Ya A kümesine ya B kümesine ya da hem A ya hem de B ye ait olan bütün öğelerden oluşan kümeye, *A ile B nin bileşimi,* denilir ve $A \cup B$ simgesiyle gösterilir; yani,

$$A \cup B \; = \; \{ \; x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \; \} \tag{5.1}$$

dir.

Arakesit

Hem A kümesine hem de B kümesi ne ait olan bütün öğelerden oluşan kümeye, *A ile B nin arakesiti,* denilir ve $A \cap B$ simgesiyle gösterilir; yani,

$$A \cap B = \{ \; x \mid x \in A \wedge x \in B \} \tag{5.2}$$

dir.

Ayrık Kümeler

A ile B kümelerinin arakesiti boş ise; yani,

$$A \cap B \; = \; \emptyset \tag{5.3}$$

ise, *A kümesi ile B kümesi birbirlerinden ayrıktırlar (kesişmiyorlar),* denilir.
Hiçbir ortak öğesi olmayan iki küme ayrıktır.

Kesişen Kümeler

A ile B kümelerinin arakesiti boş değilse ; yani,

$$A \cap B \; \neq \; \emptyset \tag{5.4}$$

ise, A ile B kümeleri *ayrık değildir (kesişiyorlar),* denilir. Kesişen iki kümenin en az bir tane ortak öğeleri vardır.

Fark

A kümesinin öğelerinden B kümesine de ait olanları attıktan sonra, geriye kalan öğelerin oluşturduğu kümeye, A ile B nin farkı diyecek ve bunu $A \setminus B$ ya da $A - B$ simgelerinden birisiyle göstereceğiz; yani,

$$A - B = A \setminus B = \{ \; x \mid x \in A \wedge x \notin B \; \} \tag{5.5}$$

dir.
$(A \setminus B) \neq (B \setminus A)$ olduğu apaçıktır.

Simetrik Fark

A ile B nin bileşim kümesinden, arakesitlerinin çıkarılmasıyla elde edilen kümeye, A ile B kümelerinin *simetrik farkı* diyecek ve bunu $A \triangle B$ simgesiyle göstereceğiz; yani,

$$A \triangle B = \{(A \cup B) \setminus (A \cap B)\} \tag{5.6}$$

dir.

$$(A \triangle B) = (B \triangle A)$$

olduğu hemen görülür.

5.3 KÜMELER CEBİRİ

Bu bölümde bileşim, arakesit, fark, simetrik fark ve tümleme işlemleriyle ilgili başlıca özelikleri çıkaracağız.

Teorem 5.3.1. *a. Her küme boş kümeyi kapsar.*

b. Her küme, o kümeyi belirleyen önermenin belirlediği evrensel küme tarafından kapsanır.

c. Bir küme ile onun tamlayan kümesinin bileşimi, evrensel kümelerine eşittir.

İSPAT: $A = \{\, x \mid p(x) \,\}$ herhangi bir küme ve

$$E = \{\, x \mid p(x) \vee p'(x)\}$$

A yı kapsayan evrensel küme olsun. *(Evrensel küme tanımına bakınız.)* Aşağıdaki bağıntıları göstermeliyiz.

$$\begin{array}{llcl} a. & \emptyset & \subset & A \\ b. & A & \subset & E \\ c. & E & = & A \cup A' \end{array}$$

a. *Olmayana Ergi Yöntemini* kullanalım. Eğer $\neg(\emptyset \subset A)$ olsaydı,

$$\begin{array}{rcl} \neg(\emptyset \subset A) & \Leftrightarrow & [\exists x((x \in \emptyset) \wedge (x \notin A))] \equiv 0 \\ & \Rightarrow & [\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A] \equiv 1 \\ & \Rightarrow & [(\emptyset \subset A)] \equiv 1 \end{array}$$

olurdu. Sağdaki ilk satırda, $[(x \in \emptyset) \equiv 0]$ olduğundan, $(x \in A)$ önermesi ister doğru, ister yanlış olsun, $((x \in \emptyset) \wedge (x \notin A))$ bileşik önermesi hepyanlıştır. Bu satırdaki ifadenin olumsuzu, ikinci satırdaki ifadeye eşittir ve hepdoğrudur. Üçüncü satıra geçmek için, alt küme tanımını kullanmak yetecektir.

b.

$$x \in A \Rightarrow \; p(x) \Rightarrow x \in E$$

yazabiliriz. Neden?

c.

$$\begin{aligned} x \in E &\Leftrightarrow [p(x) \vee p'(x)] \\ &\Leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in A')] \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup A' \end{aligned}$$

olduğundan,

$$E \subset (A \cup A') \qquad \wedge \qquad E \supset (A \cup A')$$

bağıntıları vardır. Bu isteneni verir.

Buradan görüldüğü ve daha önce de söylediğimiz gibi, evrensel küme, ele aldığımız kümeyi belirleyen Φ önermesine bağlı olarak değişmektedir. İşlemlerde kolaylığı sağlamak için , ele alacağımız bütün kümeleri kapsayacak kadar büyük; ama yalnız onları kapsayacak kadar küçük bir evrensel kümenin seçildiğini varsayacağız.

Farklı evrensel kümelerin seçilmesi, kümelerle yapacağımız işlemlerin özeliklerini değiştirmeyecektir.

Buna göre, E evrensel kümesinin belli bir p açık önermesini sağlayan öğelerinden oluşan A alt kümesi

$$A = \{\, x \mid x \in E \wedge p(x)\} = \{\, x \mid \Phi(x) \wedge p(x)\} \tag{5.7}$$

dir. Buradaki p önermesinin, genellikle, E yi belirleyen Φ önermesinden farklı olabileceğine dikkat edilmelidir. Zaten Φ önermesiyle pek ilgilenmeyeceğiz. Ele alacağımız bütün kümeler E ye ait olacağından, yukarıdaki ifadeyi daha kısa olarak,

$$A = \{\, x \mid p(x) \,\} \tag{5.8}$$

biçiminde yazabiliriz.

Aşağıdaki teoremlerin ispatları, önermeler cebirinde yaptığımız ilgili bağıntılardan çıkar.

Önerme 5.3.1. *A ile B herhangi iki küme ise, aşağıdaki bağıntılar sağlanır.*

1.	$A = B$	$\Leftrightarrow$	$[(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)]$
2.	$x \in A$	$\Leftrightarrow$	$x \notin A'$
3.	$x \in A'$	$\Leftrightarrow$	$x \notin A$
4.	$A \subset B$	$\Leftrightarrow$	$A \cup B = B$
5.	$A \subset B$	$\Leftrightarrow$	$A \cap B = A$
6.	A	$\subset$	$(A \cup B)$
7.	B	$\subset$	$(A \cup B)$
8.	$(A \cap B)$	$\subset$	A
9.	$(A \cap B)$	$\subset$	B
10.	$(A \cap A')$	$=$	$\emptyset$

Önerme 5.3.2. *A, B, C herhangi üç küme ise, aşağıdaki bağıntılar sağlanır.*

a.	A	$=$	A
b.	$A = B$	$\Rightarrow$	$B = A$
c.	$(A \subset B) \wedge (B \subset C)$	$\Rightarrow$	$(A \subset C)$
d.	$(A = B) \wedge (B = C)$	$\Rightarrow$	$(A = C)$
e.	$A \setminus B$	$\neq$	$B \setminus A$

Önerme 5.3.3. *A , B ve C herhangi üç küme ise, aşağıdaki bağıntılar sağlanır.*

1. $A \cup \emptyset = A$ *(Boş küme bileşim işleminin birimidir)*
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$ *(Boş küme, arakesit işleminin yok edicisidir)*
3. $A \cup A = A$ *(Bileşimde Eşgüçlülük Kuralı)*
4. $A \cap A = A$ *(Arakesitte Eşgüçlülük Kuralı)*
5. $A \cup B = B \cup A$ *(Bileşim İşleminin Yer Değiştirebilirliği)*
6. $A \cap B = B \cap A$ *(Arakesitin Yer Değiştirebilirliği)*
7. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(Bileşimin Birleşebilirliği)*
8. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(Arakesitin Birleşebilirliği)*
9. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(Arakesit Üzerine Dağılma)*
10. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(Bileşim Üzerine Dağılma)*

Bunlara *kümeler cebirinin kuralları* diyeceğiz.

İSPAT: Örnek olarak, burada son eşitlik ispatlanacaktır. Ötekilerin ispatını öğrenciye bir alıştırma olarak bırakıyoruz.

1. Yol: Önermeler Cebiri ile Kümeler Cebiri'nin bilinen özeliklerini kullanarak, istenen bağıntıyı çıkarabiliriz.

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \quad \text{arakesit tanımı} \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \quad \text{bileşim tanımı} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \quad \text{dağılma} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \quad \text{dağılma} \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{bileşim tanımı} \end{aligned}$$

2. Yol: Gösterilecek eşitliğin sol ve sağındaki önermelerin doğruluk tablolarını düzenleyip; doğruluk değerlerinin aynı olduğunu görebiliriz. Bunun için, her iki yandaki önermeleri yalın bileşenlerine ayırıp, herbirisinin doğruluk değerlerini bir tabloda göstereceğiz.

Eşitliğin sol ve sağındaki önermelere,

$P(x) = x \in A \cap (B \cup C)$

$Q(x) = x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

diyelim. Bu iki önermenin mantıksal denk olduğunu göstermek için, Aşağıdaki tabloyu düzenleyelim.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \cap B$	$x \in A \cap C$	$x \in B \cup C$	$P(x)$	$Q(x)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Bu tablodan, evrensel kümeye ait her x için,

$$P(x) \equiv Q(x)$$

olduğu görülmektedir. O halde,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

eşitliği çıkmış olur.

Önerme 5.3.4. *E evrensel küme, A ile B bunun birer alt kümesi iseler, aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

1.	$A \cup E$	$=$	E	*E, Bileşimin Birim Öğesidir*
2.	$A \cap E$	$=$	A	*E, Arakesitin Birim Öğesidir*
3.	A	$=$	$E \setminus A'$	
4.	A'	$=$	$E \setminus A$	
5.	$(A')'$	$=$	A	
6.	E'	$=$	$\emptyset$	
7.	$\emptyset'$	$=$	E	
8.	$(A \cup B)'$	$=$	$A' \cap B'$	*De Morgan Kuralı*
9.	$(A \cap B)'$	$=$	$A' \cup B'$	*De Morgan Kuralı*
10.	$(A \subset B)$	$\Rightarrow$	$A' \supset B'$	

İspat: Aşağıdaki gerektirmeler, Önermeler Cebirinde ve Kümeler Cebirinde gördüğümüz özeliklerdir. Her bir adımı nedenleriyle açıklayınız.

$$
\begin{array}{lrcl}
1. & A \subset E & \Rightarrow & A \cup E = E \\
2. & A \subset E & \Rightarrow & A \cap E = A \\
3. & x \in A & \Leftrightarrow & x \notin A' \Leftrightarrow x \in E \setminus A' \\
4. & x \in A' & \Leftrightarrow & x \notin A \Leftrightarrow x \in E \setminus A \\
5. & x \in (A')' & \Leftrightarrow & x \notin A' \Leftrightarrow x \in A \\
6. & x \in E' & \Leftrightarrow & x \notin E \Leftrightarrow \neg\Omega(x) \Rightarrow x \in \emptyset \\
7. & x \in \emptyset' & \Leftrightarrow & x \notin \emptyset \Leftrightarrow \Omega(x) \Leftrightarrow x \in E \\
 & & & \\
8. & x \in (A \cup B)' & \Leftrightarrow & x \notin A \cup B \\
 & & \Leftrightarrow & (x \notin A) \wedge (x \notin B) \\
 & & \Leftrightarrow & (x \in A') \wedge (x \in B') \\
 & & \Leftrightarrow & x \in A' \cap B') \\
 & & & \\
9. & x \in (A \cap B)' & \Leftrightarrow & x \notin A \cap B \\
 & & \Leftrightarrow & (x \notin A) \vee (x \notin B) \\
 & & \Leftrightarrow & (x \in A') \vee (x \in B') \\
 & & \Leftrightarrow & x \in A' \cup B'
\end{array}
$$

5.4 ALIŞTIRMALAR

1. A, B, C, D birer küme ve E evrensel küme ise, aşağıdaki eşitlikleri sağlayınız.
   (a) $(A \setminus B)' = B \cup A'$
   (b) $A \setminus B = A \cap (E \setminus B)$
   (c) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
   (d) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$
2. (a) $A \setminus B = A \Leftrightarrow (A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \setminus A = \emptyset\ A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$
   (b) $A \setminus B = B \setminus A \Leftrightarrow A \triangle C = B \Leftrightarrow B \triangle C = A$
   (c) $(A \subset C \cap B \subset C) \Leftrightarrow A \cup B \subset C$
   (d) $(C \subset A \cap C \subset B) \Leftrightarrow C \subset (A \cap B$
   (e) $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$
   (f) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$
3. Aşağıdaki eşitlikleri gösteriniz.
   (a) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
   (b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
   (c) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \setminus C) \cup B$
   (d) $A \triangle B = A' \triangle B' = A \cup B) \cap (A' \cup B') = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$
   (e) $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$