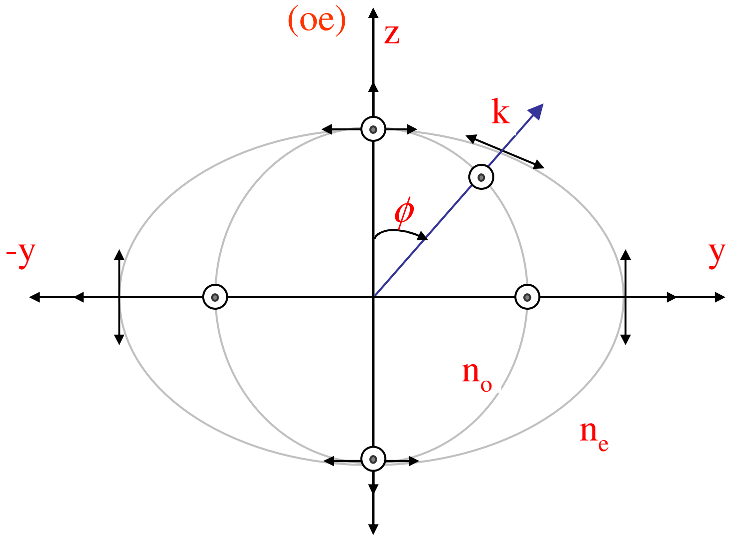
# 8. Ders

# Kristal Ortamda Işık



Bu bölümü bitirdiğinizde,

- Optik kristaller,
- Kristal ortamda Maxwell denklemleri,
- Normal ve anormal kırılma indisi,
- Çiftkırılma,
- Optik eksen,
- Dalga plakaları

konularında bilgi sahibi olacaksınız.

# Sekizinci Ders: İçerik

- İzotropik ve Anizotropik Ortamlar
- Anizotropik Ortamda Maxwell Denklemleri
- İzotropik Olmayan (Anizotropik) Kristaller
    - Kübik Kristaller
    - Tek Eksenli Kristaller
    - Çift Eksenli Kristaller
- Optik Eksen Tanımı
- Çift Kırılma
- Anizotropik Kristallerin Uygulamaları
    - Dalga Plakaları

## Optik kristallerin önemi

- Optik kristallerde ilerleyen ışık, kutuplanma doğrultusuna ve ilerleme yönüne bağlı olarak farklı kırılma indisleri göreceğinden, bu malzemeler ışığın bileşenleri arasında faz farkı oluşturmada kullanılır,

- Optik kristaller ile, ışığın kutuplanma doğrultusunu ve kutupluluk özelliğini değiştiren optik devre elemanları (dalga plakaları) yapılabilir.

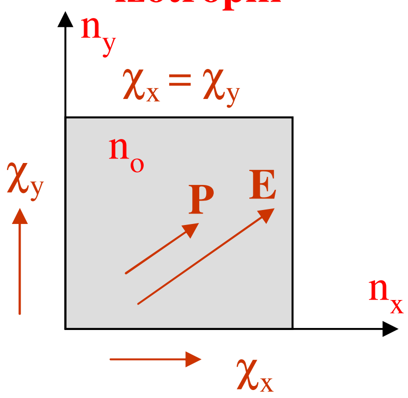
# İzotropik Ortam: Hatırlatma

$$\vec{P} = \varepsilon_o \chi \vec{E}$$

χ=skaler (izotropik ortam) ⟹

- ***E* ile *P* paralel (E//P)**
- ***E* ile *D* paralel (E//D)**
- ***k* ile *S* paralel (k//S)**

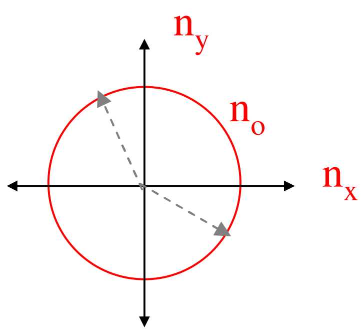
**izotropik**



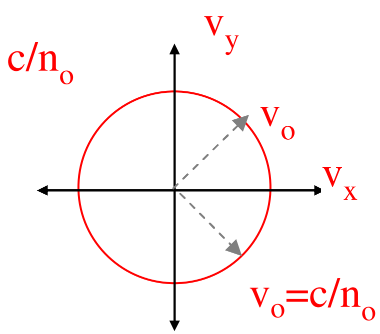

**kırılma indisi** — **dielektrik sabiti** — **elektrik geçirgenlik** — **elektrik duygunluk**

$$n^2 = \kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = (1+\chi)$$

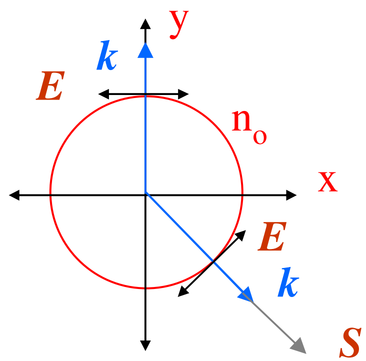
χ=skaler (izotropik ortam)




**Kırılma indisi elipsoidi**




**Eş hız yüzeyleri**




**Enerji akışı**

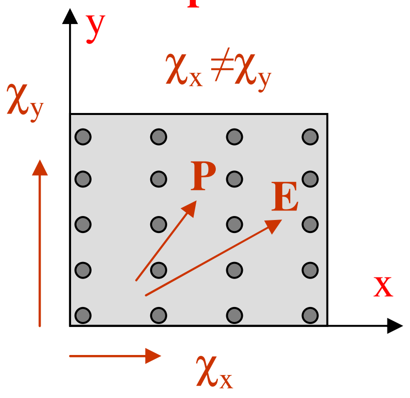
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

# Anizotropik Ortam-1

Kristalin diğer ortamlardan, elektromanyetik dalganın ilerleyişi düşünüldüğünde, en önemli farklılığı anizotropik özellik gösterebilmesidir; yani farklı yönlerdeki elektriksel özelliği farklı olabilmektedir.

**Anizotropik ortam**




Kutuplanma vektörü ve Uygulanan dış elektrik alan arasındaki bağıntı

$$\vec{P} = \varepsilon_o \chi \vec{E}$$

$\chi$=tensör (kristal ortam) $\Rightarrow$

- ***E* ile *P* paralel ?**
- ***E* ile *D* paralel ?**
- ***k* ile *S* paralel ?**

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \varepsilon_o \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \Rightarrow \chi = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{bmatrix}$$

**Vektör, tensör'e karşı**

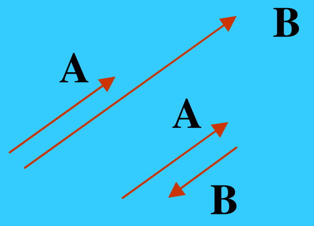
$$\vec{B} = k\vec{A}$$

k skaler

k: sayı

$$\vec{B} \,//\, \vec{A}$$

$B_x = kA_x$
$B_y = kA_y$
$B_z = kA_z$




(+) k>1

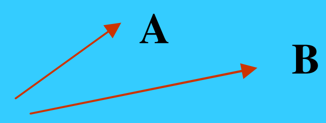
(-) k<1

$$\vec{B} = k\vec{A}$$

**k** tensör

$$k = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

$B_x = k_{xx}A_x + k_{xy}A_y + k_{xz}A_z$
$B_y = k_{yx}A_x + k_{yy}A_y + k_{yz}A_z$
$B_z = k_{zx}A_x + k_{zy}A_y + k_{zz}A_z$



# Anizotropik Ortam-2

**x:1, y:2, z:3**

$$n^2 = \kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = (1+\chi)$$

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{bmatrix} \Rightarrow \chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \kappa = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix}$$

Elektrik duygunluk

Dielektrik sabiti κ cinsinden

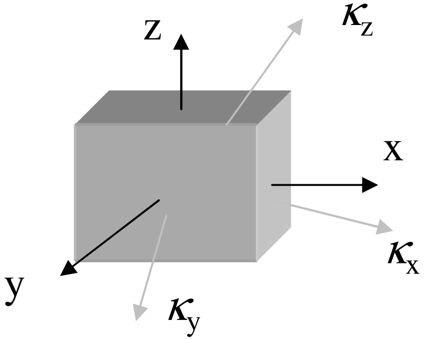
$$\vec{D} = \varepsilon_o(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_o\kappa\vec{E}$$

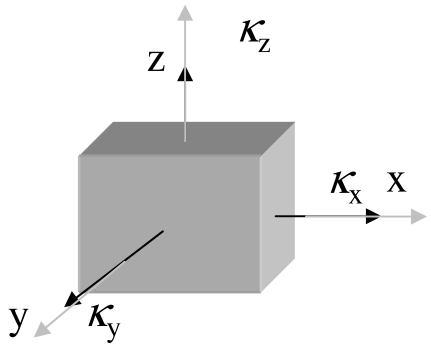
$$D_i = \varepsilon_o \sum_{j=1}^{3} \kappa_{ij} E_j$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

$D_1=\varepsilon_0[\kappa_{11}E_1+ \kappa_{21}E_2 + \kappa_{13}E_3]$
$D_2=\varepsilon_0[\kappa_{21}E_1+ \kappa_{22}E_2 + \kappa_{23}E_3]$
$D_3=\varepsilon_0[\kappa_{31}E_1+ \kappa_{32}E_2 + \kappa_{33}E_3]$

Sıradan ve soğurucu olmayan bir kristal için bu tensör simetriktir ve her zaman 3 tane temel eksen bulunabilir.



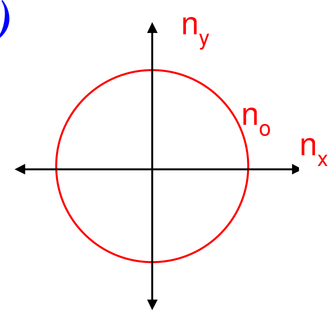

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix}$$

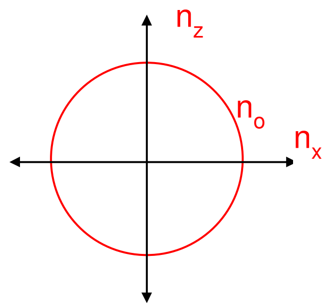
# Anizotropik Ortamın Sınıflandırılması

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \qquad n = \sqrt{\kappa} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}}$$

### *Kübik sistem(Bakır, gümüş, sodyum Al metal sistemleri)*

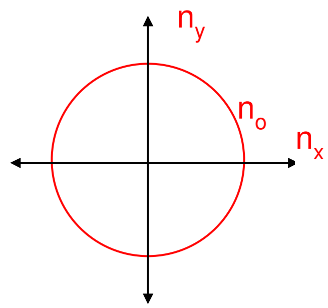
$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{11} \end{bmatrix} \qquad \kappa_{11}=\kappa_{22}=\kappa_{33} \qquad n_o = \sqrt{\kappa}$$

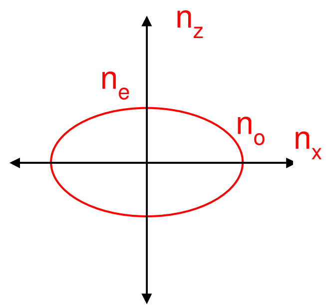



### *Tek eksenli kristal sistem(Kuartz, Kalsit)*

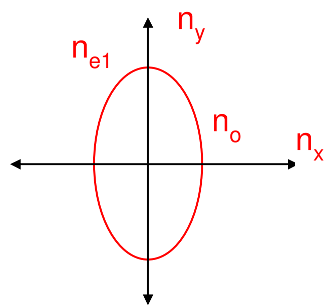
$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \qquad \kappa_{11} \neq \kappa_{33} \qquad \begin{aligned} n_o &= \sqrt{\kappa_{11}} \\ n_e &= \sqrt{\kappa_{33}} \end{aligned}$$

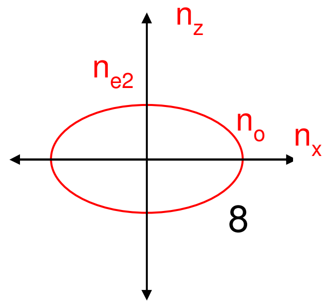



### *Çift eksenli kristal sistem(Mika)*

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \qquad \kappa_{11} \neq \kappa_{22} \neq \kappa_{33} \qquad \begin{aligned} n_o &= \sqrt{\kappa_{11}} \\ n_{e1} &= \sqrt{\kappa_{22}} \\ n_{e2} &= \sqrt{\kappa_{33}} \end{aligned}$$



# Anizotropik Ortamda Maxwell Denklemleri-1

Işığın kristal ortamda davranışını incelemek ve özdurumlarını bulmak için Maxwell denklemlerinin kristal ortam için yazılıp, ortamın anizotropiklik özelliğini ($\chi$: tensör) de göz önünde bulundurularak çözülmesi gerekmektedir.

$$\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{D}} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} = 0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{H}} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{E}} = -\mu_o \frac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{H}} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}$$

Burada $\boldsymbol{D}_i = \varepsilon_o \kappa_{ij} E_j$ $\boldsymbol{B}=\mu_o \boldsymbol{H}$ $\sigma_{ij}=0$ (dielektrik ortam J=0)

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\mu_o \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = -\mu_o \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\nabla^2\vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E})$ vektörel eşitliği kullanılırsa

$$-\nabla^2\vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) = -\mu_o \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}$$

$\vec{\nabla}.\vec{E} \neq \vec{\nabla}.\vec{D}$ izotropik ortamda ε skaler olmasına karşın anizotropik ortamda ε tensördür ve ***E*** ile ***D*** her zaman birbirine paralel değildir!

# Anizotropik Ortamda Maxwell Denklemleri-2

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\partial(\kappa_{1y} E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\kappa_{2y} E_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\kappa_{3y} E_z)}{\partial z}$$

Dielektrik sabitler $\kappa_{1y}$, $\kappa_{2y}$ ve $\kappa_{3y}$ ortak değillerdir (ortak parantez dışına alınamaz!)

Yukarıdaki ifadeden $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) \neq 0$ olduğu için dalga denklemini buna göre çözmemiz gerekecek.

$$-\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) = -\mu_o \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}$$

*Hangi durumda yukarıdaki denklem dalga çözümlüdür? Çözümün dalga formunda olduğunu kabul edersek*

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)}$$
$$\vec{D} = \vec{D}_o e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)}$$
$$\vec{H} = \vec{H}_o e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla^2 (\vec{E}_o e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)}) = -(\vec{k}.\vec{k}).\vec{E}$$

# Anizotropik Ortamda Maxwell Denklemleri-3

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = i\vec{k}.\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{E}) = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(i\vec{k}.\vec{E}) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(i\vec{k}.\vec{E}) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(i\vec{k}.\vec{E})$$

$$\Downarrow$$

x-bileşeni için

$$\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(i\vec{\boldsymbol{k}}.\vec{\boldsymbol{E}}) = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(ik_x E_x + ik_y E_y + ik_z E_z) = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(ik_x e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} + \ldots) = i\left[ik_x.ik_x E_x + \ldots\right]$$

Bu işlem y- ve z-bileşeler için de yapılırsa yukarıdaki diferansiyel eşitlik vektörel olarak

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{E}) = \hat{i}k_x\left[\vec{k}.\vec{E}\right] + \hat{j}k_y\left[\vec{k}.\vec{E}\right] + \hat{k}k_z\left[\vec{k}.\vec{E}\right] = \vec{k}.\left[\vec{k}.\vec{E}\right]$$

$$-\nabla^2\vec{E} + \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{E}) = -\mu_o\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\left[\vec{k}.\vec{k}\right].\vec{E} + (-\vec{k}\left[\vec{k}.\vec{E}\right]) = -\mu_o\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}$$

*Işığın anizotropik ortamda ilerleyişini belirleyen dalga denklemi*

Herhangi bir maddede ***k.D***=0 fakat en genel olarak ***k.E***≠0

# Anizotropik Ortamda Maxwell Denklemleri-4

İzotropik madde (bütün doğrultular aynı) için bulduğumuz denklemi çözelim

$$-\nabla^2\vec{E}+\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{E})=-\mu_o\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left[\vec{k}.\vec{k}\right].\vec{E}-\vec{k}.\left[\vec{k}.\vec{E}\right]=\mu_o\omega^2\vec{D}}$$

Diferansiyel eşitlik Vektörel eşitlik

Homojen ve izotropik madde için ***k.E***=0 ve **D**=ε**E** olduğundan

$$0+k^2\boldsymbol{E}=\mu_o\omega^2\varepsilon\boldsymbol{E}$$

$$(k^2-\mu_o\omega^2\varepsilon)\boldsymbol{E}=0$$

Bu denklemin çözümünün

$$k^2-\mu_o\omega^2\varepsilon=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{k^2}=\frac{1}{\mu_o\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega}{|k|}=\frac{1}{\sqrt{\mu_o\varepsilon}}=v_{faz}$$

$$\vec{k}=\left|\vec{k}\right|\hat{k}=\frac{\omega}{v}\hat{k}=\frac{\omega}{c/n}\hat{k}=n\frac{\omega}{c}\hat{k}$$

Önceden bulunan sonucu verdiği gösterilebilir.

# Anizotropik Ortamda Maxwell Denklemleri-5

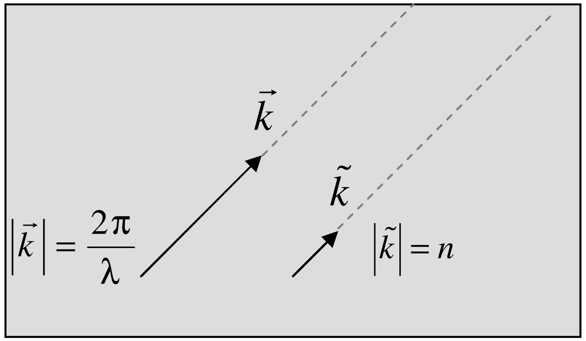
$$\boxed{\left[\vec{k}.\vec{k}\right].\vec{E}-\vec{k}.\left[\vec{k}.\vec{E}\right]=\mu_o\omega^2\vec{D}}$$

İşlemleri kolaylaştıracak boyutsuz bir nicelik $\tilde{k}$ tanımı yaparsak $\tilde{k}=n\hat{k}$

$$\tilde{k}\tilde{k}=n^2$$

boyutsuz bir vektör, yönü yayılma yönünde, büyüklüğü ise kırılma indisine eşit.

$$\vec{k}=\left|\vec{k}\right|\hat{k}=\frac{\omega}{v}\hat{k}=(\frac{\omega}{c})n\hat{k}$$




$$\left[\vec{k}.\vec{k}\right].\vec{E}-\vec{k}.\left[\vec{k}.\vec{E}\right]=\mu_o\omega^2\vec{D}$$

$$\vec{k}.\left[\vec{k}.\vec{E}\right]=\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{k}.\left[\tilde{k}.\vec{E}\right]$$

$$\left[\vec{k}.\vec{k}\right].\vec{E}=-\frac{\omega^2}{c^2}(\tilde{k}.\tilde{k}).\vec{E}$$

$$\boxed{-\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{k}.\left[\tilde{k}.\vec{E}\right]+\frac{\omega^2}{c^2}(\tilde{k}.\tilde{k}).\vec{E}=\mu_o\omega^2\vec{D}}$$

# Anizotropik Ortamda Maxwell Denklemleri-6

$$\tilde{k}\tilde{k} = n^2$$

$$\left[\tilde{k}.\tilde{k}\right].\vec{E} = n^2\vec{E}$$

$$-\tilde{k}.\left[\tilde{k}.\vec{E}\right] + \left[\tilde{k}.\tilde{k}\right].\vec{E} = \mu_o c^2 \vec{D}$$

Bileşenler cinsinden

$$-\tilde{k}_i.\left[\tilde{k}.\vec{E}\right] + n^2 E_i = \mu_o c^2 D_i = \kappa_{ij} E_j$$

$$D_x = \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z$$

$$D_i = \varepsilon_{ij}E_j = \mu_o \varepsilon_o \kappa_{ij} E_j$$

Boyutsuz formda karakteristik denklem

$$n^2 \boldsymbol{E_i} - \tilde{k}_i(\tilde{k}_j E_j) - \kappa_{ij}\boldsymbol{E_j} = 0$$

*$E_j$'yi parantez dışına nasıl alırız?* Kranecker-Delta gösterimi kullanarak elektrik alanları

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & eger\ i = j \\ 0 & eger\ i \neq j \end{cases} \qquad \boldsymbol{E_i} = \delta_{ij}\boldsymbol{E_j}$$

şeklinde yazabiliriz.

$$n^2 \delta_{ij}\boldsymbol{E_j} - \tilde{k}_i(\tilde{k}_j E_j) - \kappa_{ij}\boldsymbol{E_j} = 0$$

$$(n^2\delta_{ij} - \tilde{k}_i\tilde{k}_j - \kappa_{ij})\boldsymbol{E_j} = 0 \qquad (n^2\delta_{ij} - \tilde{k}_i\tilde{k}_j - \kappa_{ij}) \equiv M_{ij}$$

$$M_{ij}E_j = 0$$

$$M_{ij}(n)E_j = 0$$

n: özdeğerler

$E_j$: özfonksiyonlar

$$M_{1j}E_j = M_{11}E_1 + M_{12}E_2 + M_{13}E_3$$

# Anizotropik Ortamda Maxwell Denklemleri-7

Bu bir özdeğer probleminden başka bir şey değildir. Genel olarak

$$A_{ij}E_j = aE_j$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

Burada $a$ özdeğer, $E_j$'ler ise öz fonksiyonlardır.

$$(A_{ij} - a\delta_{ij})E_j = 0 \qquad (A_{ij} - a\delta_{ij}) \equiv M_{ij}(a)$$

$$M_{ij}(a)E_j = 0$$

$\det M_{ij}(a)=0$ ifadesinden özdeğerler bulunur: $a_1$ , $a_2$ gibi

özdeğerler $A_{ij}E_j = aE_j$ ifadesinde kullanılarak öz fonksiyonlar ($E_j$) bulunabilir.

Fiziksel olarak özdeğer ve özfonksiyonlar ne anlama gelir?

**özdeğerler → kırılma indisleri**

**özfonksiyonlar → elektrik alan (kutuplanma doğrultusu)**

***Geliştirilen özdeğer problemini uygulamaya çalışalım. Önce izotropik (kübik) daha sonra tek eksenli bir ortama uyarlayarak özdeğer ve özfonksiyonları bulmaya çalışalım.***

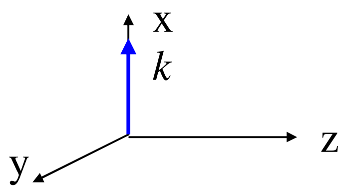
***Kübik Sistem*** (Bütün yönler özdeş-İzotropik Ortam)

Işığın (***k***'nın) yönünün kübik ortam içinde x-doğrultusunda olduğunu kabul edelim (**k** = î )

$$(n^2\delta_{ij} - \tilde{k}_i\tilde{k}_j - \kappa_{ij}) \equiv M_{ij}$$

Boyutsuz $\tilde{k}$ niceliği $\tilde{k}_1 = n\hat{i}$, $\tilde{k}_2 = 0$, $\tilde{k}_3 = 0$

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{11} \end{bmatrix}$$ kübik sistem




$$\tilde{k}_i = n\hat{k}_i \qquad \tilde{k}_j = n\hat{k}_j \qquad \tilde{k}_i\tilde{k}_j = \begin{bmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$M_{ij}$ matrisi

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} n^2 - \kappa_{11} - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 - \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & n^2 - \kappa_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{11} - n^2 \end{bmatrix}$$

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{11} - n^2 \end{bmatrix}$$

$detM_{ij}=0$ ifadesinden özdeğerleri bulabiliriz. Bu özdeğerler:

$$\kappa_{11}[(\kappa_{11}-n^2)^2]=0 \quad \Rightarrow \quad n^2=\kappa_{11} \quad \Rightarrow \quad n=(\kappa_{11})^{1/2}$$

Daha önce bulunan sonuçlarla aynı!

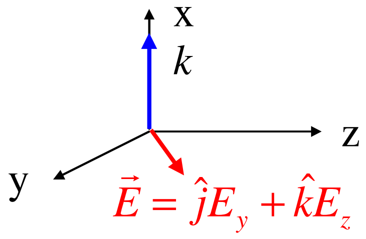
Elektrik alanı (yani her öz değere karşı gelen öz fonksiyonları) bulmaya çalışalım:

$$M_{ij}(n)E_j = 0$$

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \kappa_{11}E_1 + 0 + 0 = 0 \\ 0+0+0=0 \\ 0+0+0=0 \end{matrix}$$

$E_1=0$, $E_2$=keyfi, $E_3$=keyfi

($E_x=0$, $E_y \neq 0$, $E_z \neq 0$)

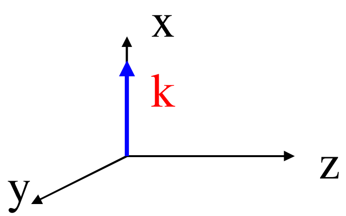



İzotropik ortamı tanımlayan sadece bir özdeğer (kırılma indisi) vardır ve ışığın ilerleme doğrultusunda alan bileşeni yoktur (alan yz düzleminde kutuplanmıştır-özfonksiyon).

***Tek eksenli (uniaxial) sistem*** (Bir yöndeki optik özellik diğer iki yönden farklı olan sistemler)

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix}$$

x ve y aynı, z farklı




Işığın, x-doğrultusunda olduğunu kabul edelim $\vec{\boldsymbol{k}} = k\hat{i}$

$$\tilde{k}_1 = n\hat{i} \qquad \tilde{k}_2 = 0 \qquad \tilde{k}_3 = 0 \qquad \tilde{k}_i\tilde{k}_j = \begin{bmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$D_{ij}$ matrisi $M_{ij} = \begin{bmatrix} -n^2 + \kappa_{11} + n^2 & 0 & 0 \\ 0 & -n^2 + \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 + \kappa_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} - n^2 \end{bmatrix}$

***Kırılma indisleri (özdeğerler):***

$\mathrm{DetM}_{ij}(n)=0 \Rightarrow \kappa_{11}[(\kappa_{11}-n^2).(\kappa_{33}-n^2)]=0$ => Birbirinden farklı iki çözüm vardır, bunlar:

$n_1=(\kappa_{11})^{1/2}$ ve $n_2=(\kappa_{33})^{1/2}$

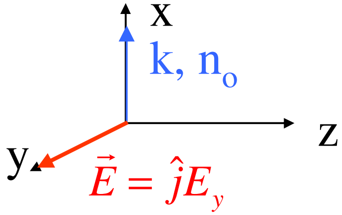
$n_1=(\kappa_{11})^{1/2}\equiv n_o$ => o-ışını [normal ışın (ordinary-ray)]

$n_2=(\kappa_{33})^{1/2}\equiv n_e$ => e-ışını [anormal ışın (extraordinary ray)]

## *Elektrik alanlar (öz fonksiyonlar):*

$n_1=(\kappa_{11})^{1/2}\equiv n_o$ o-ışını (*normal ışın*) durumu için: $M_{ij}(n_o)E_j^o=0$

$$\begin{bmatrix}\kappa_{11} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \kappa_{33}-\kappa_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1^o\\ E_2^o\\ E_3^o\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}\kappa_{11}E_1^o+0+0=0\\ 0+0+0=0\\ 0+0+(\kappa_{33}-\kappa_{11})E_3^o=0\end{matrix}$$




$E_1=0$, $E_2$=keyfi, $E_3=0$ (alan vektörü ilerleme yönünde sıfır, alan y-yönünde kutuplanmıştır)

---

$n_2=(\kappa_{33})^{1/2}\equiv n_e$ e-ışını (*anormal ışın*) durumu. Bu değere karşı gelen alan vektörleri

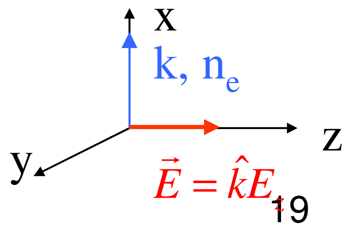
$$M_{ij}(n_e)E_j^e=0$$

$$\begin{bmatrix}\kappa_{11} & 0 & 0\\ 0 & \kappa_{11}-\kappa_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1^e\\ E_2^e\\ E_3^e\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}\kappa_{11}E_1^e+0+0=0\\ 0+(\kappa_{11}-\kappa_{33})E_2^e+0=0\\ 0+0+0=0\end{matrix}$$

$$\kappa_{11}\neq 0\Rightarrow E_1^e=0$$

$$(\kappa_{11}-\kappa_{33})\Rightarrow E_2^e=0$$

$E_1=0$, $E_2=0$, $E_3$=keyfi (elektrik alan z-yönünde kutuplanmıştır!)



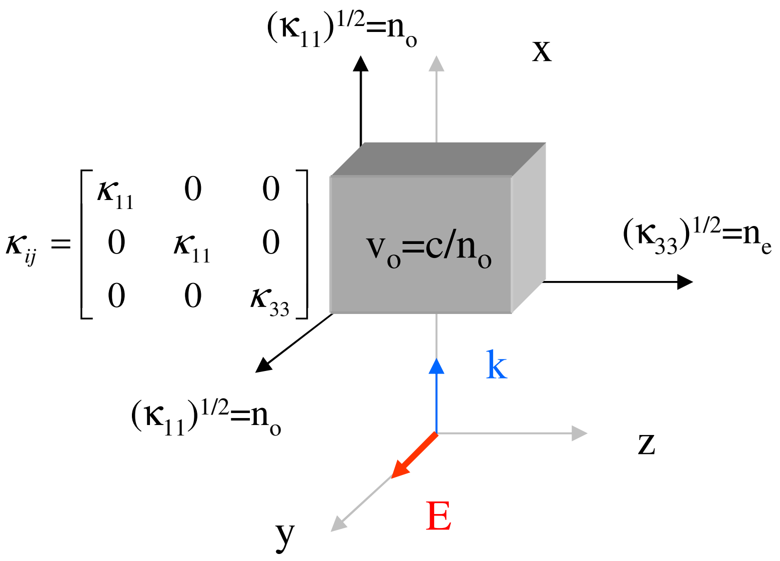
# Çiftkırılma (Birefriengence)

Bu sonuçlar tek eksenli sistemde aynı anda iki tane ilerleyen dalga olduğunu söyler.

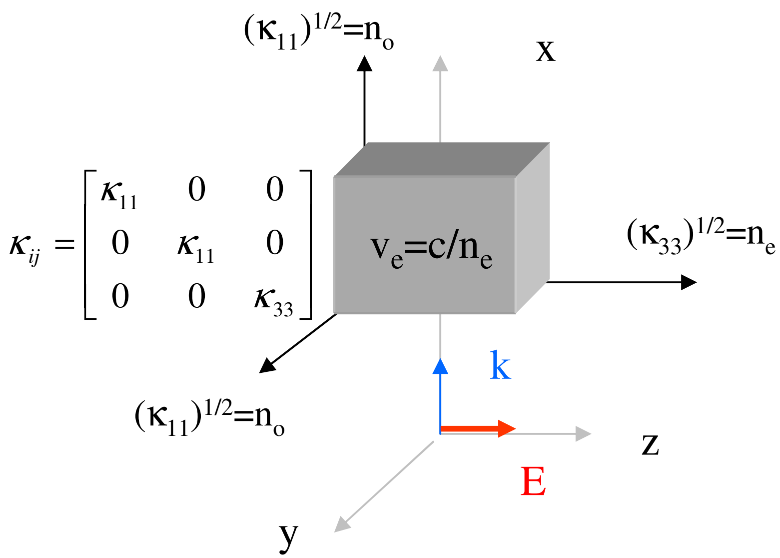
Işık x-yönünde ilerlerken kutuplanma doğrultusu y-yönünde ise $n_o$, z-yönünde ise $n_e$ kırılma indisini görecektir.

Işık aynı maddede ilerlemesine karşın elektrik alanının kutuplanmasına bağlı olarak farklı kırılma indisi görür (!Bir ortamın kırılma indisi <u>kutuplanma doğrultusuna</u> da bağlı, n(P)!).

> Işık, kristal içinde ilerlerken kutuplanma özelliğine bağlı olarak farklı kırılma indisi görerek farklı açılarda kırılacağından bu olaya ***Çiftkırılma (Birefriengence)*** denir.




$P_y$ kutuplu ışık $n_o$ kırılma indisini görür




$P_z$ kutuplu ışık $n_e$ kırılma indisini görür

Önemli Not: Işığın ilerlediği eksen değil! elektrik alanın hangi eksen üzerinde olduğu kırılma indisini belirler.

# Optik Eksen-1

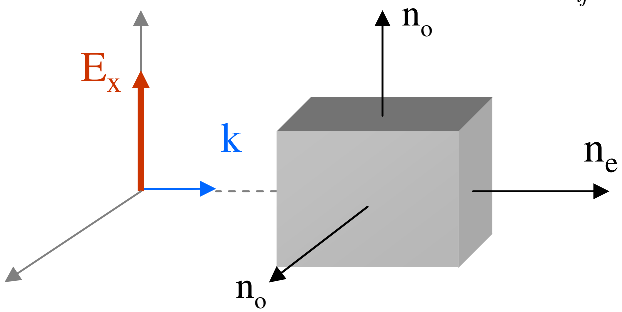
İzotropik maddelerde tek bir kırılma indisi vardır; ışık her yönde aynı hızla ilerler ve ışığın hızı kristaldeki yayılma doğrultusundan bağımsızdır.

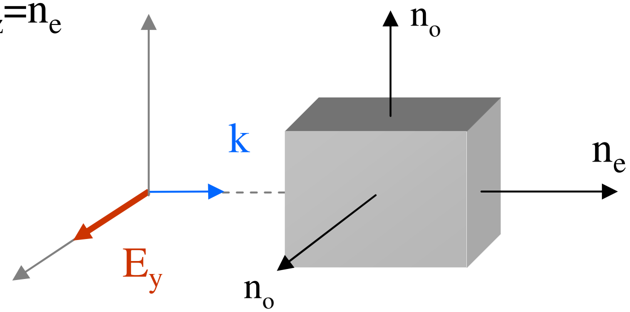
***Anizotropik ortamda da öyle bir eksen bulunabilir mi ki bu eksen boyunca ilerleyen ışık, kutuplanma doğrultusundan bağımsız olarak aynı kırılma indisini görsün?***

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix}$$

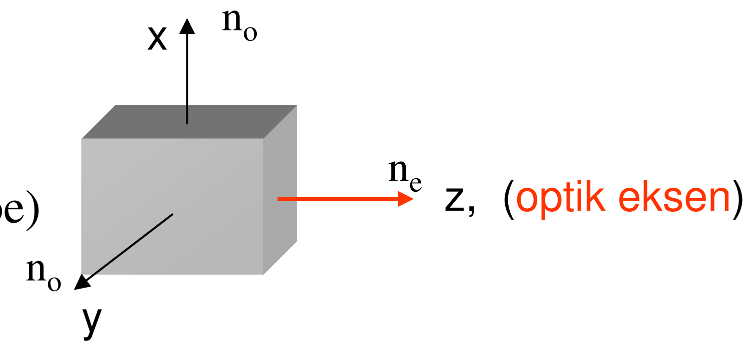
$n_x = n_y = n_o$

$n_z = n_e$




x ve y eksenleri aynı;
z ekseni farklı (optik eksen-oe)




*Yukarıdaki tek eksenli malzemede ışık z-doğrultusunda ilerlerse elektrik alan ister x, isterse y doğrultusunda olsun aynı hızda ilerler. Kutuplanma doğrultusundan bağımsız olarak aynı kırılma indisininin görüldüğü bu doğrultuya optik eksen (oe) denir.*

# Optik Eksen-2

İki ekseni aynı olan kristallere Tek Eksenli Kristaller denmesinin sebebi tek bir optik eksen oluşundandır.

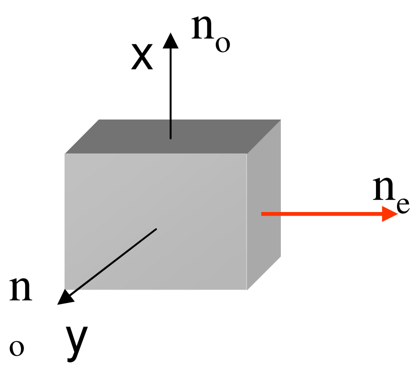
Çift eksenli kristallerde iki farklı optik eksen bulunur.

İzotropik kristallerde ise optik eksen sayısı sonsuzdur.

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix}$$

$n_x = n_y = n_o$

$n_z = n_e$



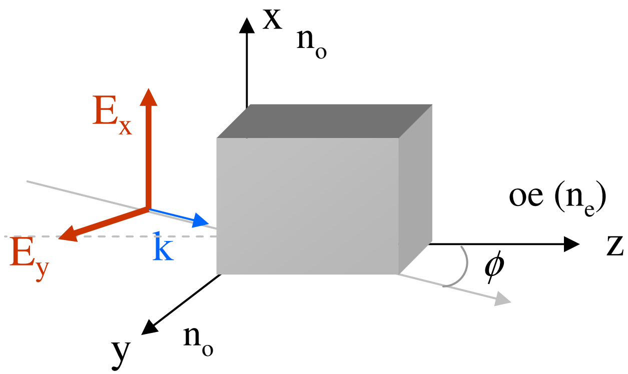

z, (optik eksen)

x ve y eksenleri aynı

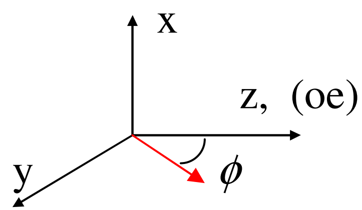
z ekseni farklı (optik eksen-oe)

# Tek Eksenli Kristaller-Genel Durum

Tek eksenli bir sistemde genel duruma bakalım. Optik eksen (z) boyunca değil de optik eksen ile belli bir açı ($\phi$) yaparak ilerleyen ışığı düşünelim.




$$\tilde{k}_1 = 0$$
$$\tilde{k}_2 = n\sin\phi$$
$$\tilde{k}_3 = n\cos\phi$$




$$n^2\delta_{ij} = \begin{bmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{bmatrix} \qquad \kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \qquad \tilde{k}_i\tilde{k}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n^2\sin^2\phi & n^2\sin\phi\cos\phi \\ 0 & n^2\sin\phi\cos\phi & n^2\cos^2\phi \end{bmatrix}$$

Karakteristik denklemde $(n^2\delta_{ij} - \tilde{k}_i\tilde{k}_j - \kappa_{ij}) \equiv M_{ij}$ yukarıdaki ifadeleri kullanırsak $D_{ij}$ matrisi

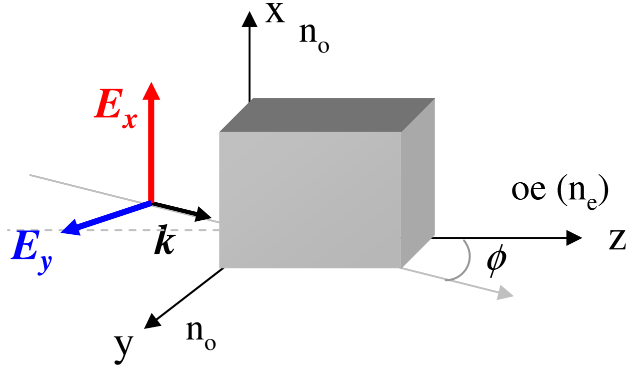
$$M_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} + n^2(\sin^2\phi - 1) & n^2\sin\phi\cos\phi \\ 0 & n^2\sin\phi\cos\phi & \kappa_{33} + n^2(\cos^2\phi - 1) \end{bmatrix}$$

| Özdeğerler | | Özfonksiyonlar |
|---|---|---|
| 1. özdeğer: $n_1(\phi) = n_o$ | $\Rightarrow$ | $E_x$ kutuplu ışık |
| 2. özdeğer: $\frac{1}{n_2(\phi)} = \sqrt{\frac{\cos^2(\phi)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{n_e^2}}$ | $\Rightarrow$ | $E_y$ kutuplu ışık |

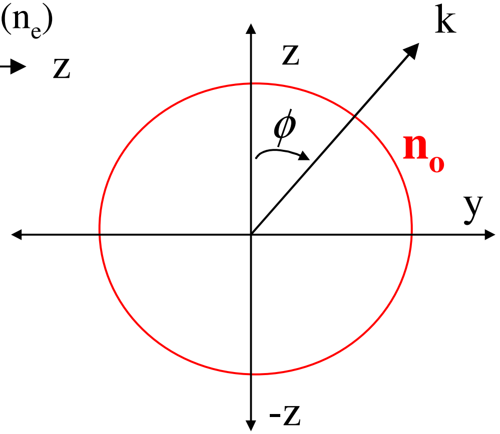
# Tek Eksenli Kristaller-Genel Durum

Anizotropik ortamda ışığın göreceği kırılma indisi yayılma ve kutuplanma doğrultusuna bağlı olarak farklılık gösterecektir. Tek eksenli kristal durumunda:

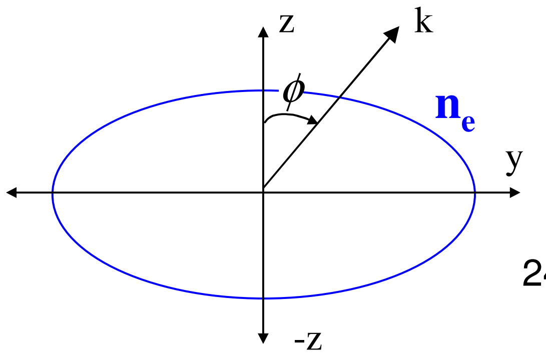
- x-doğrultusunda kutuplanmış ışık (o-ışını), optik ekseni z olan kristal içinde, optik eksen ile $\phi$ açısı yaparak ilerlerse $\phi$ açısından bağımsız olarak $n_o$ sabit kırılma indisini görecektir.
- zy-düzleminde kutuplanmış ışık (e-ışını), $\phi$ açısına bağlı olarak farklı $n(\phi)$ kırılma indisini görecektir.



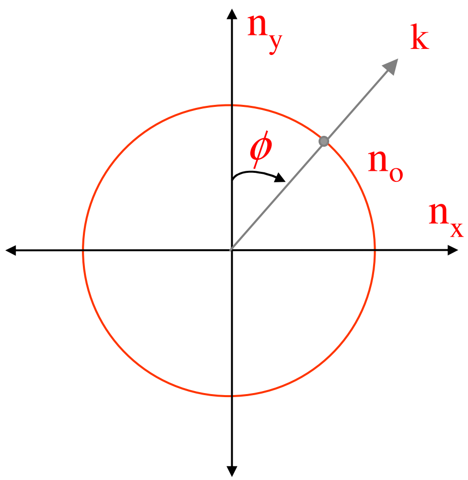

Ex kutuplu (normal) ışık ⇨ $n(\phi) = n_o$



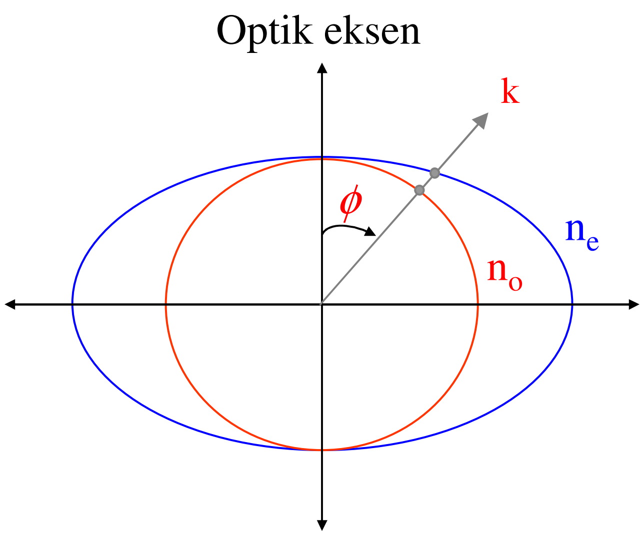

Ey kutuplu (anormal) ışık ⇨ $\dfrac{1}{n^2(\phi)} = \dfrac{\cos^2(\phi)}{n_o^2} + \dfrac{\sin^2(\phi)}{n_e^2}$



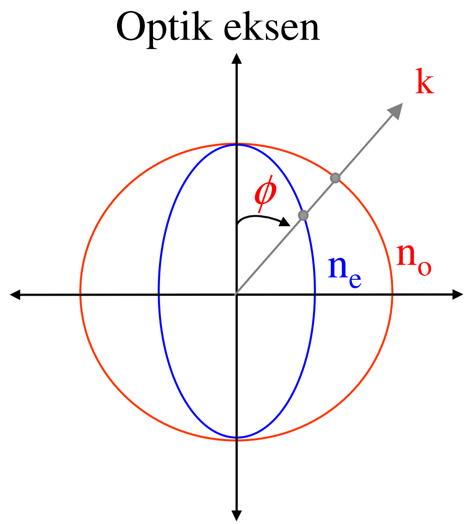
# Anizotropik Malzeme Türleri




İzotropik kristal ($n_o$)




Pozitif tek eksenli kristal ($n_e > n_o$)




Negatif tek eksenli kristal ($n_e < n_o$)

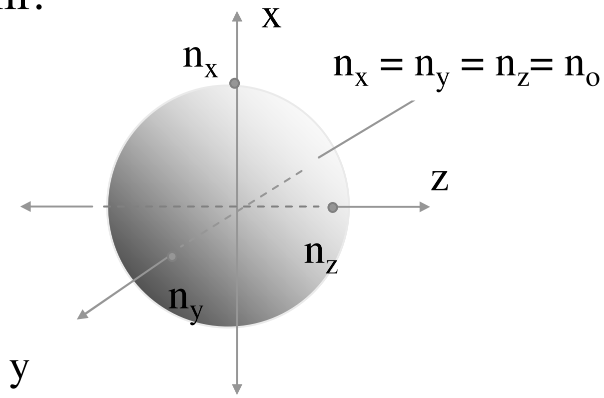
Çift kırılmada kırılma indisinin küçük olduğu eksene hızlı eksen,
büyük olduğu eksene yavaş eksen denir.

$n_e < n_o$ durumunda $n_e$ hızlı eksen, $n_o$ ise yavaş eksendir

| Kuartz (pozitif) | Kalkita (negatif) |
|---|---|
| $n_o$=1,5443 | $n_o$=1,6584 |
| $n_e$=1,5534 | $n_e$=1,4864 |
| Faz hızı $v_o > v_e$ | Faz hızı $v_o < v_e$ |

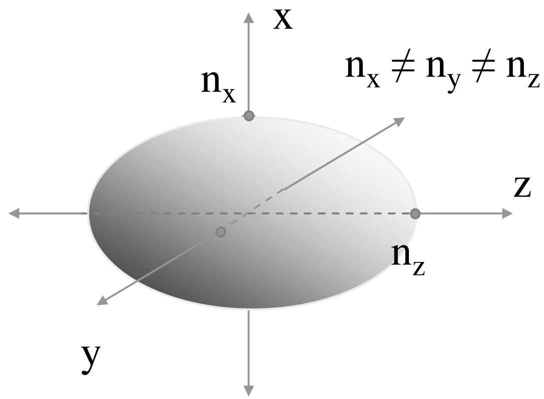
# Kırılma İndis Elipsoidi-1

Sonuçlar, 3 boyut için genelleştirilebilir. Üç ekseni farklı olan kristal üç farklı kırılma indisi ile ifade edilir.




$$\frac{x^2}{n_o^2}+\frac{y^2}{n_o^2}+\frac{z^2}{n_o^2}=1$$

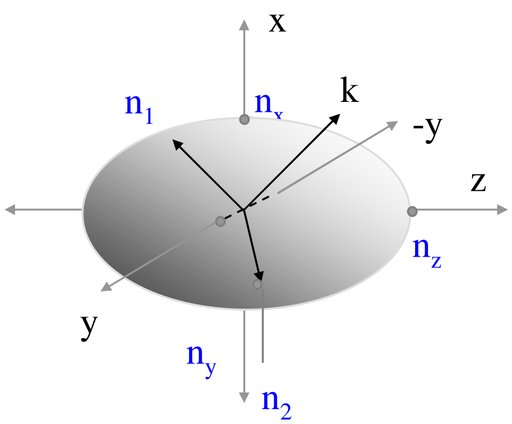
İzotropik ortam




$$\frac{x^2}{n_x^2}+\frac{y^2}{n_y^2}+\frac{z^2}{n_z^2}=1$$ İndis elipsoidi

Anizotropik ortam

Herhangi bir ***k*** doğrultusunda ilerleyen ışığın göreceği kırılma indis değerleri:



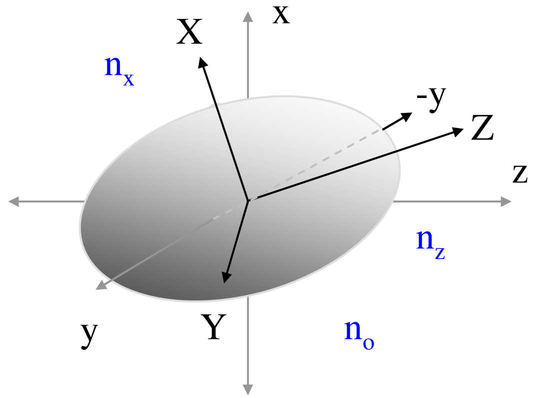

o-kutuplu ışık, $n_o=n_1$

e-kutuplu ışık, $n_e=n_2$

# Kırılma İndis Elipsoidi-2

En genel durumda indis elipsoidi (dış etkilerden dolayı dönmüş veya asal eksenlere paralel olmayan eksenler seçilmiş ise):

$$\left[\frac{1}{n^2}\right]_1 x^2 + \left[\frac{1}{n^2}\right]_2 y^2 + \left[\frac{1}{n^2}\right]_3 z^2 + 2\left[\frac{1}{n^2}\right]_4 yz + 2\left[\frac{1}{n^2}\right]_5 xz + 2\left[\frac{1}{n^2}\right]_6 xy = 1$$




Yeni durumda uygun koordinat dönüşümü yapılırsa (xyz -> XYZ) indis elipsoidi yine basit formda ifade edilebilir.

$$\frac{X^2}{n_x'^2} + \frac{Y^2}{n_y'^2} + \frac{Z^2}{n_z'^2} = 1 \quad \text{İndis elipsoidi}$$

# Anizotropik Ortamda Enerji Akışı

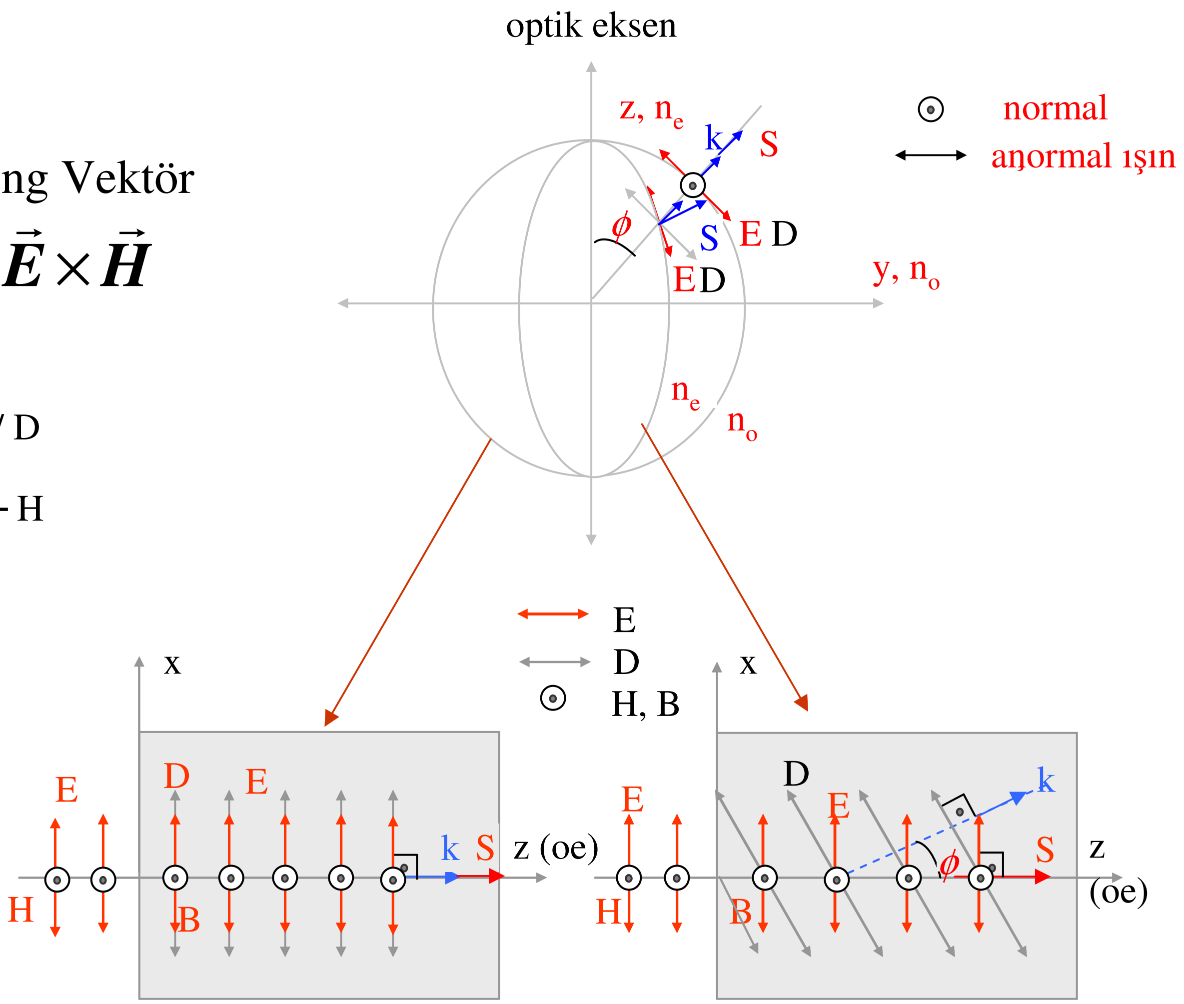
Anizotropik ortamda enerji akışı, izotropik ortamda olduğu gibi ***S*** Poynting Vektör doğrultusundadır ancak ***E*** ile ***D*** paralel olmadığı için ***k*** ile ***S*** birbirine paralel değildir!

Poynting Vektör

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

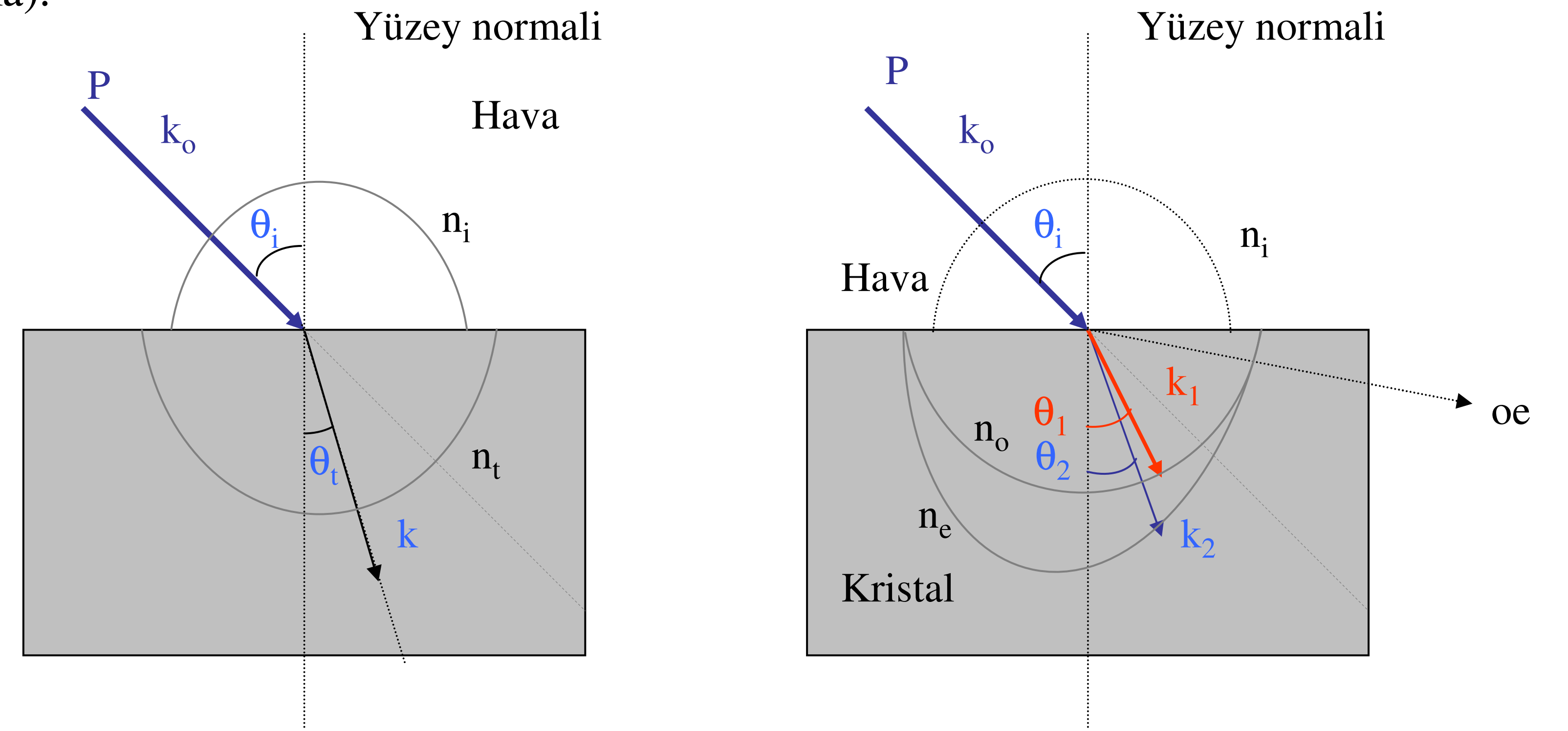
E // D

S ⊥ H



# Çift Kırılma-Snell Yasası

Kırılma indisi farklı olan ortama giren ışığın kırılma bilgisini veren Snell yasasını anizotropik ortam durumunda yeniden gözden geçirmek gerekecektir. Kırılma indisi, ışığın kutuplanma ve optik eksen ile yaptığı açının fonksiyonu olduğundan Snell yasasına da bu bilgileri yansıtmak gerekecektir. Bu durumda ikinci ortama giren ışık farklı açılarda kırılacaktır (çiftkırılma).




izotropik ortam

$$n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t$$

anizotropik ortam

$$n_i \sin\theta_i = n_t(\theta, P)\sin\theta_t(P)$$

$$\frac{1}{n^2(\phi)} = \frac{\sin^2\phi}{n_e^2} + \frac{\cos^2\phi}{n_o^2}$$

# Anizotropik Kristallerin Uygulamaları

Çiftkırıcı maddeler optoelektronikte sıkça kullanılır

Bu maddeler özellikle:

- Işığı kutuplamada,
- Kutuplanmış ışığın kutupluluk özelliğini değiştirmede,
- Dalga plakalarının yapımında,
- Işığın modülasyonunda

kullanılmaktadır.

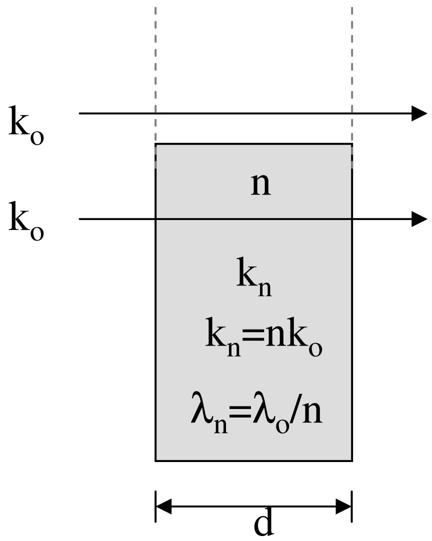
# Dalga Plakaları-1

Çift kırıcı maddeler uygun şekillerde kullanılarak (optik eksen ve kalınlıkları ayarlanarak) dalga plakaları olarak adlandırılan pasif optik elemanlar yapılabilir.

*Dalga plakaları*,

- o-ışık ve e-ışık arasında çeşitli dalga boylarında faz farkı oluşturmaya yarayan optik elemanlardır.
- Optik eksene özel bir açıda gelen ışık dalgası $n_o$ ve $n_e$ farkına bağlı olarak farklı hızlarda ilerler.
- Dalga plakası olarak kullanılan malzemenin kalınlığı öyle ayarlanabilir ki $n_o$ ve $n_e$ eksenlerinden çıkan ışığın arasındaki optik yol farkı çeyrek dalga plakaları için $\lambda/4$, yarım dalga plakaları için $\lambda/2$, tam dalga plakaları için $\lambda$ şeklinde olabilir.

# Dalga Plakaları-2




$$Faz = \phi = kz = nk_o z = \frac{2\pi}{\lambda_o} z$$

$$Faz = \phi = kd = nk_o d = n\frac{2\pi}{\lambda_o} d$$

$$Faz = \phi = kz = \frac{2\pi}{\lambda} z$$

$$\lambda_o = \frac{\lambda_{bosluk}}{n_o}, \lambda_e = \frac{\lambda_{bosluk}}{n_e}$$

$\Rightarrow$

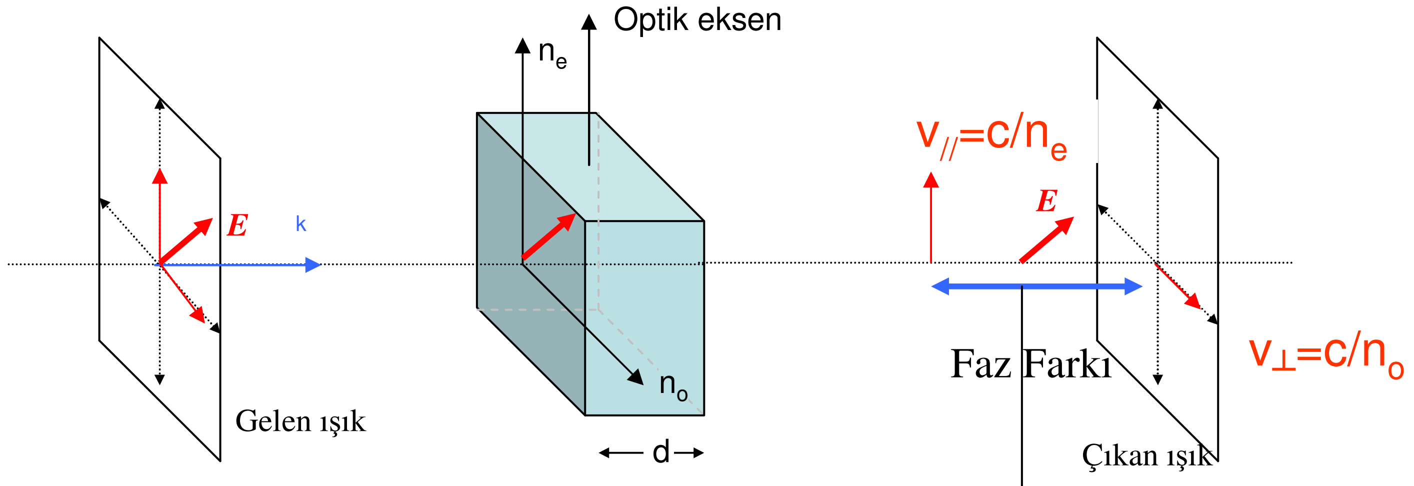
$$\text{Faz Farkı} = \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_o}\mathrm{d} - \frac{2\pi}{\lambda_e}\mathrm{d}$$

$$\text{Faz Farkı} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{bosluk}}}\mathrm{d}\left|\mathrm{n_o} - \mathrm{n_e}\right|$$

$$OptikYolfarkı \equiv d\left|n_o - n_e\right|$$

# Dalga Plakaları-3

Tek Eksenli Kristalin Optik eksenine herhangi bir açıda gelen ışık




$n_e$: Yavaş eksen $n_o$: Hızlı eksen

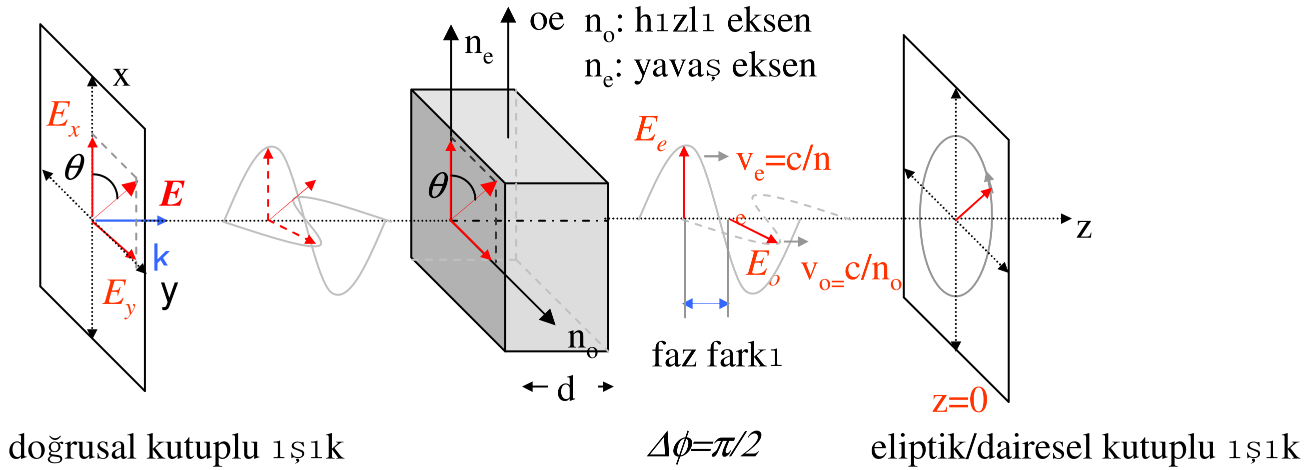
$$\text{Faz farkı} = \frac{2\pi}{\lambda_{bosluk}} d\left|n_o - n_e\right|$$

# Dalga Plakaları-4: Çeyrek Dalga Plakaları

***Çeyrek Dalga Plakası***

o-ışını ve e-ışık demetleri arasında π/2 faz farkı oluşturan kristal "çeyrek dalga plakası" olarak adlandırılır. d plaka kalınlığı olmak üzere π/2 lik faz farkı $|n_o d - n_e d| = \lambda/4$ lük bir yol farkına eşdeğerdir.

$$Faz\ farkı = \frac{2\pi}{\lambda_{bosluk}} d\left|n_o - n_e\right| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Optik\ yol\ farkı = d\left|n_o - n_e\right| = \frac{\lambda_{bosluk}}{4}$$




*Yarım Dalga Plakaları* doğrusal kutuplanmış ışığı en genel olarak eliptik, eliptik kutuplanmış ışığı ise doğrusal kutuplu dalgaya çevirir.

$\phi \neq 45^o$ veya $135^o$ ise Eliptik Kutuplu Dalga

$\phi = 45^o$ veya $135^o$ ise Dairesel Kutuplu Dalga

Örneğin kuarzdan yapılan çeyrek dalga plakasının sodyum ışığı için kalınlığı d=0,00164'ye eşit olacaktır.

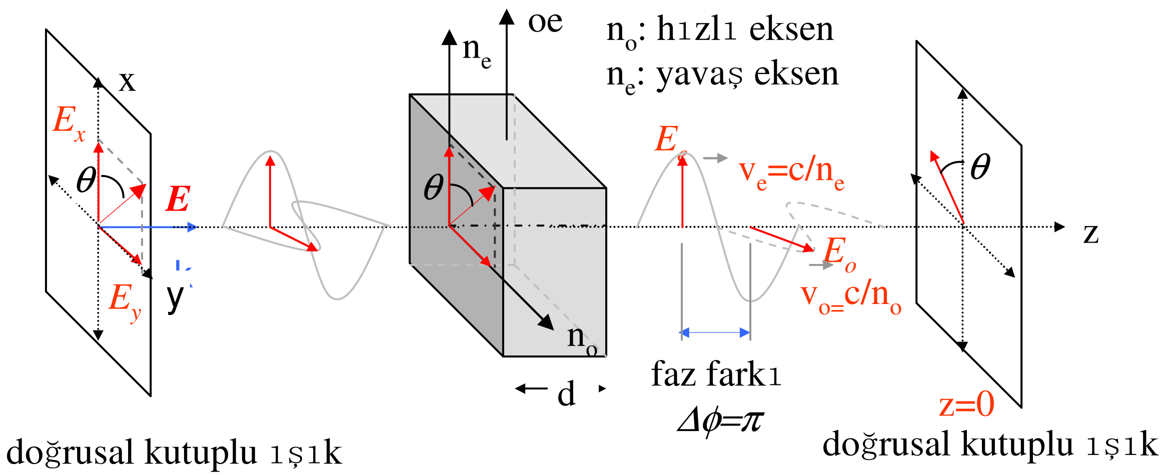
# Dalga Plakaları-5: Yarım Dalga Plakaları

## *Yarım Dalga Plakası*

o-ışını ve e-ışık demetleri arasında π kadarlık faz farkı oluşturan bir kristal "yarım dalga plakası" olarak adlandırılır.

- Yarım dalga plakası da çeyrek dalga plakasına benzer bir düzenekle oluşturulabilir İki plakanın tek farkı kalınlıklarının farklı oluşudur. d plaka kalınlığı olmak üzere π kadarlık faz farkı $|n_o d - n_e d| = \lambda/2$ kadarlık bir yol farkına eşdeğerdir.
- Yarım dalga plakası için faz farkı π olacak şekilde plakanın kalınlığı ayarlanır.
- Yarım Dalga Plakaları ışığın kutuplanma doğrultusunu değiştirmekte ters çevirmekte kullanılır.

$$Faz\ farkı = \frac{2\pi}{\lambda_{bosluk}} d\left|n_o - n_e\right| = \pi \quad \Rightarrow \quad Optik\ yol\ farkı = d\left|n_o - n_e\right| = \frac{\lambda_{bosluk}}{2}$$



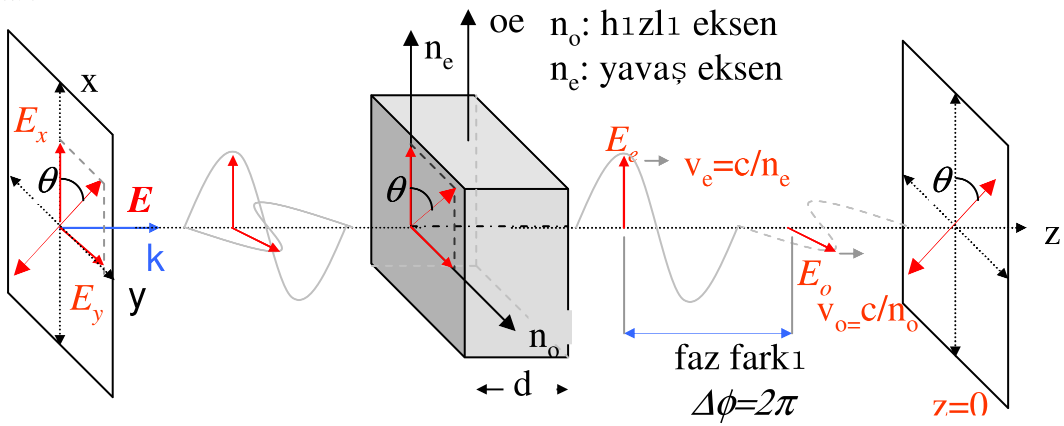
# Dalga Plakaları-6: Tam Dalga Plakaları

***Tam Dalga Plakası***

o-ışını ve e-ışık demetleri arasında 2πn kadarlık (n tam sayı) faz farkı oluşturan bir kristal "tam dalga plakası" olarak adlandırılır.

- d plaka kalınlığı olmak üzere 2π kadarlık faz farkı $|n_o d - n_e d| = \lambda$'lük bir yol farkına eşdeğerdir.
- Tam dalga plakası da yarım ve çeyrek dalga plakasına benzer bir düzenekle oluşturulabilir.
- Çeyrek dalga plakasında o- ışını ve e-ışınları arasında faz farklı π/2 olacak şekilde geciktirme sağlayacak kalınlık, tam dalga plakası için bu faz farkı 2π olacak şekilde plakanın kalınlığı ayarlanır.
- Tam dalga plakaları geciktirici olarak kullanılır.

$$Faz\ farkı = \frac{2\pi}{\lambda_{bosluk}} d\left|n_o - n_e\right| = 2\pi \quad \Rightarrow \quad Optik\ yol\ farkı = d\left|n_o - n_e\right| = \lambda_{bosluk}$$




doğrusal kutuplu ışık

doğrusal kutuplu ışık

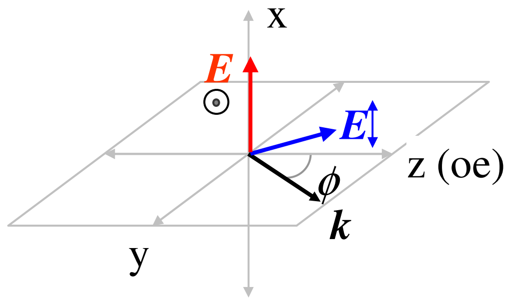
# Özet

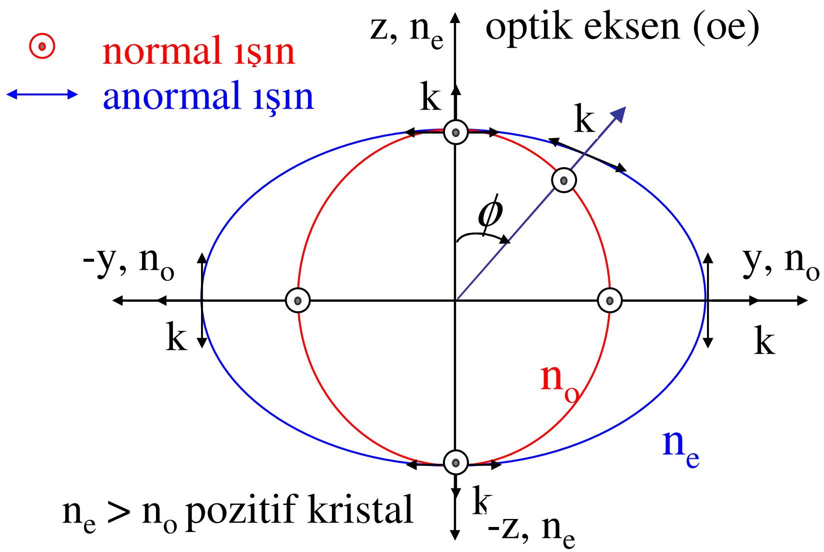
Kristal (anizotropik) ortamında ışığın ilerleyişi izotropik ortamdan oldukça farklıdır. Kristal ortamda elektrik duygunluk tensörel bir nicelik olduğundan ***E*** ile ***D*** alanları birbirine paralel değildir. Bunun sonucu olarak ortamı karakterize etmek için birden fazla kırılma indisine (özdeğerlere) ihtiyaç duyulur.

İki ekseni aynı olan tek eksenli bir kristalde kırılma indisi ışığın kutupluluk doğrultusuna bağlı olarak iki değer alır ve ışık iki modda (normal ve anormal) yayılır.

$E_o$ kutuplu (normal) ışık $n(\phi) = n_o$

$E_e$ kutuplu (anormal) ışık $\dfrac{1}{n^2(\phi)} = \dfrac{\cos^2(\phi)}{n_o^2} + \dfrac{\sin^2(\phi)}{n_e^2}$




Anizotropik ortamda dalga vektörü k ile enerji akış yönünü gösteren S vektörleri paralel değildir.

Bu malzemeler ışığın kutupluluk özelliklerini değiştirmede (dalga plakalarının yapımında örneğin yarım dalga, çeyrek dalga plakalarında) ve ışığın modülasyonunda kullanılmaktadır.

## UADMK - Açık Lisans Bilgisi

Bu ders malzemesi öğrenme ve öğretme yapanlar tarafından açık lisans kapsamında ücretsiz olarak kullanılabilir. Açık lisans bilgisi bölümü yani bu bölümdeki, bilgilerde değiştirme ve silme yapılmadan kullanım ve geliştirme gerçekleştirilmelidir. İçerikte geliştirme değiştirme yapıldığı takdirde katkılar bölümüne sadece ekleme yapılabilir. Açık lisans kapsamındaki malzemeler doğrudan ya da türevleri kullanılarak gelir getirici faaliyetlerde bulunulamaz. Belirtilen kapsam dışındaki kullanım açık lisans tanımına aykırı olduğundan kullanım yasadışı olarak kabul edilir, ilgili açık lisans sahiplerinin ve kamunun tazminat hakkı doğması söz konusudur.