# Bölüm 6: Optik Sabitlerin Frekansa Bağlılığı
# Problemler

**6.1** Bir dipolde dış elektrik alan ile alanın titreşime zorladığı ektronun yerdeğiştirmesi arasındaki faz ilişkisini bularak frekansa göre grafiğe geçiriniz

**Çözüm:**

Yerdeğiştirme

$$x(t) \cong \frac{(e/m)}{(\omega^2 - \omega_o^2 + i\frac{\gamma}{m}\omega)} E(t)$$

$$x(t) = \frac{(e/m)}{\left[(\omega^2 - \omega_o^2) + i(\frac{\gamma}{m}\omega)\right]} \frac{(\omega^2 - \omega_o^2) - i(\frac{\gamma}{m}\omega)}{\left[(\omega^2 - \omega_o^2) - i(\frac{\gamma}{m}\omega)\right]} E(t)$$

$$x(t) = \frac{(e/m)\left[(\omega^2 - \omega_o^2) - i(\frac{\gamma}{m}\omega)\right]}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (\frac{\gamma}{m}\omega)^2} E(t) = (a + ib)E(t)$$

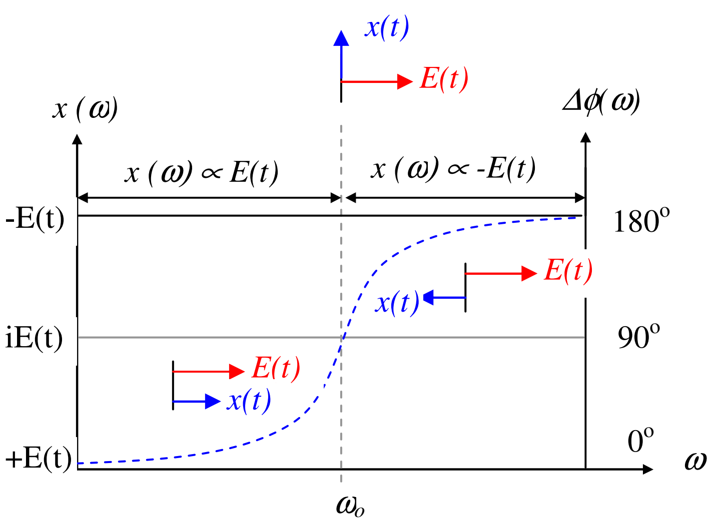
$$a \equiv \frac{(e/m)}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (\frac{\gamma}{m}\omega)^2}(\omega^2 - \omega_o^2) \quad b \equiv \frac{(e/m)(\frac{\gamma}{m}\omega)}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (\frac{\gamma}{m}\omega)^2}$$

$$x(t) = (a + ib)E(t) = \left[(a^2 + b^2)^{1/2} e^{i\phi}\right] E(t) \ , \quad \phi = \arctan(\frac{b}{a})$$

$$\omega \to 0, a \neq 0, b = 0, \phi = 0^o, x(t) \propto E(t)$$

$$\omega \to \omega_o, a = 0, b \neq 0, \phi = 90^o, x(t) \propto iE(t)$$

$$\omega \to \infty, (-a) \neq 0, b = 0, \phi = 180^o, x(t) \propto (-)E(t)$$



Eğer ortamda sönüm yoksa:

$$x(t) = \frac{(e/m)}{(\omega^2 - \omega_o^2)} E(t) = aE(t)$$

$$a \equiv \frac{(e/m)}{(\omega^2 - \omega_o^2)} \qquad b = 0$$

$$x(t) = (a)E(t) \qquad \phi = \arctan(\frac{b}{a}) = 0^0 (herzaman)$$

$$\omega \to 0, a \neq 0, b = 0, \phi = 0^o, x(t) \propto E(t)$$
$$\omega \to \omega_o, a = 0, b = 0, \phi \overset{?}{=} 0, x(t) \propto (\infty)E(t)$$
$$\omega \to \infty, (-a) \neq 0, b = 0, \phi = 0^o, x(t) \propto E(t)$$

**6.2** Dielektrik sabitin gerçek ve sanal kısımlarının

$$\hat{\kappa}(\omega) = \left( 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}} \right) + i \left( \frac{\omega_p^2(\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}} \right)$$

şeklinde verilebileceğini gösteriniz.

**Çözüm:**

$$\hat{\kappa}(\omega) = \frac{\hat{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon_o} = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_o^2 - \omega^2 + i\frac{\gamma}{m}\omega)}$$

Pay ve payda karmaşık eşlenik ile çarpılırsa

$$\hat{\kappa}(\omega) = \frac{\hat{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon_o} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2) + i(\frac{\gamma}{m}\omega)\right]} \frac{(\omega_o^2 - \omega^2) - i(\frac{\gamma}{m}\omega)}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2) - i(\frac{\gamma}{m}\omega)\right]}$$

$$\hat{\kappa}(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2\left[(\omega_o^2 - \omega^2) - i(\frac{\gamma}{m}\omega)\right]}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\gamma}{m}\omega)^2} = \left( 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\gamma}{m}\omega)^2} \right) - i \left( \frac{\omega_p^2(\frac{\gamma}{m}\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\gamma}{m}\omega)^2} \right)$$

(işaret negatif!!)

**6.3** Optik parametreler, n ve $K$'yı aşağıdaki şekilde yazılabileceğini gösteriniz.

$$n^2 - K^2 = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 - \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}} \qquad 2nK = \frac{\omega_p^2(\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}$$

**Çözüm:**

$$\hat{\kappa}(\omega) = \left(1 + \frac{\omega_p^2(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}\right) + i\left(\frac{\omega_p^2(\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}\right)$$

$$\hat{n}^2(\omega) = \hat{\kappa}(\omega) = \left(n(\omega) + iK(\omega)\right)^2 = \left(1 + \frac{\omega_p^2(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}\right) + i\left(\frac{\omega_p^2(\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}\right)$$

$$\hat{n}^2(\omega) = \left(n(\omega) + iK(\omega)\right)^2 = n^2 - K^2 + i2nK$$

$$n^2 - K^2 + i2nK = \left(1 + \frac{\omega_p^2(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}\right) + i\left(\frac{\omega_p^2(\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}\right)$$

$$n^2 - K^2 = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}$$

$$2nK = \frac{\omega_p^2(\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}$$

**6.4** Havadan cama geçen mavi ışığın kırmızı ışıktan daha fazla kırılmaya uğrayacağını gösteriniz.

Çözüm:
Mavi ışığın frekansı, kırmızı ışığın frekansından daha yüksektir. Normal dağınım bölgesinde, kırılma indisi frekans ile artış gösterdiğinden mavi ışığa karşı gelen kırılma indisi kırmızı ışıktan daha büyüktür. Kırılma indisinin büyük olması, Snell yasasından aynı geliş açısında kırılma açısının daha büyük olacağı anlamındadır.

$$\sin\theta = n_k \sin\theta_k \qquad \sin\theta = n_m \sin\theta_m$$

$$1 = \frac{n_k \sin\theta_k}{n_m \sin\theta_m} \Rightarrow \frac{\sin\theta_k}{\sin\theta_m} = \frac{n_m}{n_k} \Rightarrow \sin\theta_m = \frac{n_k}{n_m}\sin\theta_k$$

$$\sin\theta_m = \frac{n_k}{n_m}\sin\theta_k$$

**6.5** Dielektrik ortamda kırılma indisinin
(a) Düşük frekanslarda

$$\operatorname{Re}\hat{\varepsilon}(0) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2} \equiv \varepsilon_{statik}$$

(b) Yüksek frekanslarda

$$\operatorname{Re}\hat{\varepsilon}(\infty) = 1 \equiv \varepsilon_\infty$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

(a)
$\omega \to 0$

$$\hat{\kappa}(\omega \to 0) = \left(1 + \frac{\omega_p^2\omega_o^2}{\omega_o^4}\right) + i(0) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2} \equiv \hat{\kappa}_s$$

(b)

$\omega \to \infty$

$$\hat{\kappa}(\omega) = \left(1 + \frac{\omega_p^2\omega^2}{\omega^4 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}\right) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \frac{\gamma^2}{m^2}}$$

$$\hat{\kappa}(\omega \to \infty) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \frac{\gamma^2}{m^2}} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\infty^2 + \frac{\gamma^2}{m^2}} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\infty} \to 1$$

$$\hat{\kappa}(\omega \to \infty) = 1 \equiv \hat{\kappa}_\infty$$

**6.6** Dağınım bağıntısının $\omega(k) = \dfrac{c}{n(k)}k$ olarak verildigi bir ortamda grup hızı ($v_g$) ile faz hızı ($v_f = c/n$) arasındaki bağıntının

(a) $$v_g = \frac{v_f}{\left(1 - \frac{\lambda_o}{n}\frac{dn}{d\lambda_o}\right)}$$

(b) $$v_g = v_f\left(1 - \frac{k}{n}\frac{dn}{dk}\right)$$

(c) $$v_g = \frac{v_f}{\left(1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right)}$$

(d) $$v_g = v_f + \frac{dv_f}{dk}$$

(e) $$v_g = v_f - \lambda_o \frac{dv_f}{d\lambda_o}$$

olarak verildiğini gösteriniz.

**Çözüm:**

(a) $$\frac{dn}{d\omega} = \frac{dn}{d\lambda_o}\frac{d\lambda_o}{d\omega} \qquad \lambda_o = \frac{2\pi c}{\omega} \qquad \frac{d\lambda_o}{d\omega} = \frac{-2\pi c}{\omega^2} = \frac{-2\pi c}{(\frac{2\pi c}{\lambda_o^2})^2} = \frac{-\lambda_o^2}{2\pi c}$$

$$v_g = \frac{(c/n)}{(1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega})} \qquad v_g = \frac{(c/n)}{\left[1 + \frac{2\pi c}{n\lambda_o}(\frac{dn}{d\lambda_o}(\frac{-\lambda_o^2}{2\pi c}))\right]}$$

$$v_g = \frac{c}{n}(1 - \frac{\lambda_o}{n}\frac{dn}{d\lambda_o})^{-1} = v_f(1 - \frac{\lambda_o}{n}\frac{dn}{d\lambda_o})^{-1} \qquad v_g = \frac{v_f}{\left(1 - \frac{\lambda_o}{n}\frac{dn}{d\lambda_o}\right)}$$

(b) $$v_f = \frac{\omega}{k} \qquad \omega = kv_f = k\frac{c}{n}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(\frac{kc}{n}) = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2}\frac{dn}{dk} = \frac{c}{n}(1 - \frac{k}{n}\frac{dn}{dk}) = v_f\left(1 - \frac{k}{n}\frac{dn}{dk}\right)$$

$$v_g = v_f\left(1 - \frac{k}{n}\frac{dn}{dk}\right)$$

(c) $$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{(\frac{dk}{d\omega})} \qquad k = \frac{\omega n(\omega)}{c}$$

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c}(n + \omega\frac{dn}{d\omega}) \qquad \frac{dk}{d\omega} = \frac{n}{c}(1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega})$$

$$v_g = \frac{1}{\frac{n}{c}\left(1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right)} = \frac{c/n}{\left(1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right)} \qquad v_g = \frac{v_f}{\left(1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right)}$$

(d) $\omega = kv_f$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_f) = v_f + k\frac{dv_f}{dk} \qquad v_g = v_f - \lambda\frac{dv_f}{d\lambda}$$

(e) $v_g = v_f - \lambda\frac{dv_f}{d\lambda}$ $\qquad \frac{dv_f}{dk} = \frac{dv_f}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk} = \frac{dv_f}{d\lambda}\frac{1}{dk/d\lambda}$

$$v_g = v_f - \lambda\left(\frac{dv_f}{d\lambda}\frac{1}{dk/d\lambda}\right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \frac{dk}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = -\frac{2\pi}{\lambda^2}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_f) = v_f + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{\left(-\frac{2\pi}{\lambda^2}\right)} = v_f - \lambda\frac{dv_f}{dk}$$

$$v_g = v_f - \lambda\frac{dv_f}{dk}$$

**6.7:** Alüminyumun serbest elektron yoğunluğu 1,8x10$^{29}$ m$^{-3}$ tür. Alüminyumun plazma frekansını ve bu frekansa karşı gelen plazma dalgaboyunu hesaplayınız.

**Çözüm:**

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_o m}} \cong \sqrt{\frac{(1.8\times10^{29})(1,6\times10^{-19})^2}{(8,85\times10^{-12})(9,1\times10^{-31})}} \cong 2.4\times10^{16} \quad Hz$$

$$\lambda_p = \frac{2\pi}{\omega_p}nc \cong 7.9\times10^{-10}\ m = 79\,nm$$