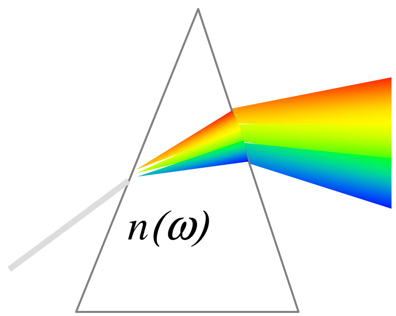
6. Ders

Optik Sabitlerin Frekansa Bağlılığı



Bu bölümü bitirdiğinizde,

- Optik sabitlerin frekansa bağlılığı,
- Optik dağınım,
- Grup kırılma indisi,
- Plazma frekansı

konularında bilgi sahibi olacaksınız.

Optik sabitlerin frekansa bağlılığının önemi

- Kırılma indisinin hem gerçek hem de sanal kısımları frekansa çok sıkı bağlıdır. Belli bir dalga boyunda geçirgen olan başka bir dalgaboyunda çok iyi bir soğurucu olabilir,

- Optik devrenin tasarım parametreleri frekans aralığını içerecektir,

- Maddenin rengi üzerine düşen dalganın frekansı ile ilgilidir.

Altıncı Ders: İçerik

- Optik Sabitlerin Frekansa Bağlılığı
- Dielektrik Ortam
  - Soğurma
  - Dağıtkanlık
- Metal Ortam
- Plazma Frekansı

Optik sabitlerin Frekansa Bağlılığı-1

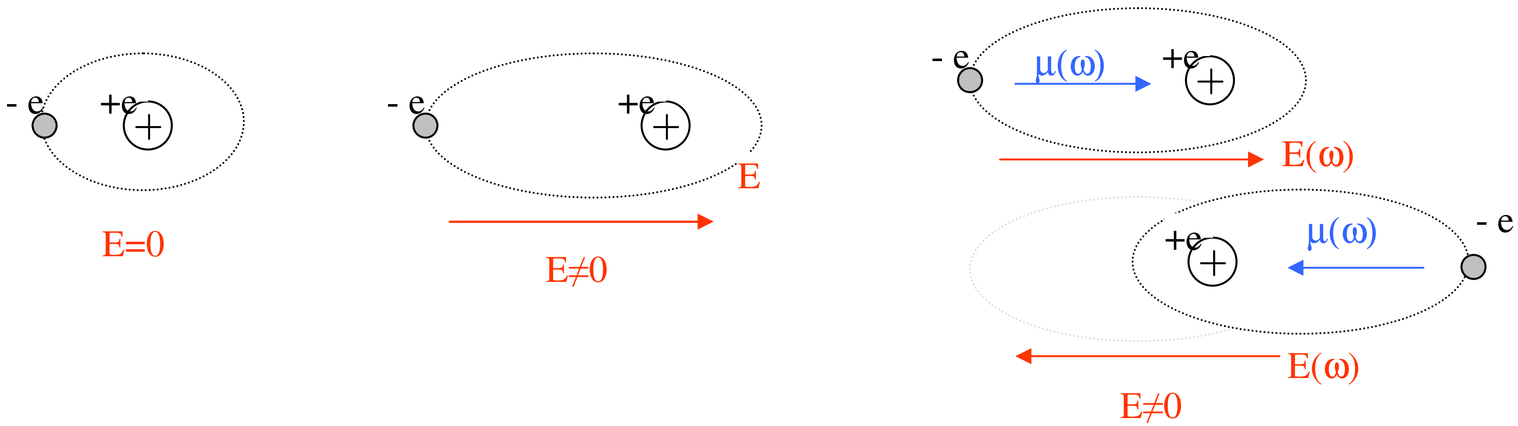
Şimdiye kadar, dış elektrik alanın frekansını sabit kabul edip ortamın alana tepkisini veren Kutuplanma Vekörünü (***P***) bularak ortamın optik parametrelerini tanımladık.

Optoelektronikte kullanılan ışık tek bir frekansla sınırlı değil, geniş bir frekans aralığını içermektedir.

Maddenin elektrik duygunluğu χ (dolayısı ile kırılma indisi n) frekansa nasıl bağlıdır?

Duygunluğun (χ) frekansa bağlılığı klasik model kullanılarak bulunabilir.

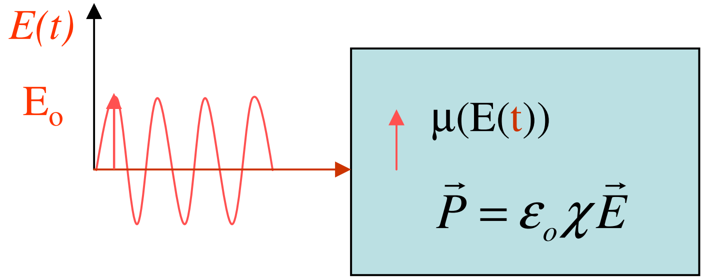
Klasik modelde (-) yüklü elektron, (+) yüklü çekirdeğe bağlıdır. Dış alan, elektronu denge noktasından uzaklaştırarak atomun yük dağılımını değiştirir (bağlı elektronların); bunun sonucunda dipol momenti oluşturur.



Alanın yön değiştirmesi ile birlikte alandan dolayı oluşan dipol momentlerinin yönü de değişir. Dış alanın frekansı düşükse dipol momentleri bu değişime ayak uydurarak alanla salınacak, ancak çok yüksek frekanslarda alana ayak uyduramayarak alanın değişimini geriden takip edeceklerdir.

Optik sabitlerin Frekansa Bağlılığı-2

Optik sabitlerin frekansa bağlılığını bulmak için öncelikle kutuplanma vektörünün (P) frekansa bağlılığını bulmamız gerekecek.



Kutuplanma vektörü (P) dipol momenti cinsinden yazılırsa

$$\vec{P}(t) = \vec{\mu}_{atom}(t)N = q\vec{x}(t)N = \varepsilon_o \chi(t)\vec{E}(t)$$

$$\chi(t) = \frac{qN}{\varepsilon_o} x(E(t))$$

N: Atom (veya molekül) yoğunluğu

Duygunluk (χ) yüklerin yerdeğiştirmesine x(t) bağlı olduğu için ortamdaki atom veya moleküllerin dış alanın frekansına bağlı olarak yerdeğiştirmesi bulunabilirse optik sabitler de türetilebilir.

Öncelikle yapılması gereken dipol momentleri için yerdeğiştirmeyi

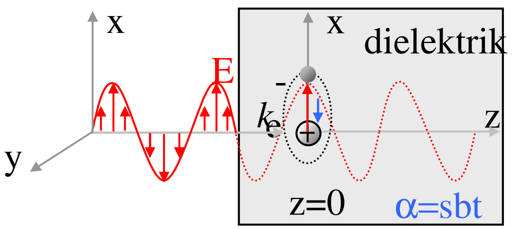
$$x(t)\,?$$

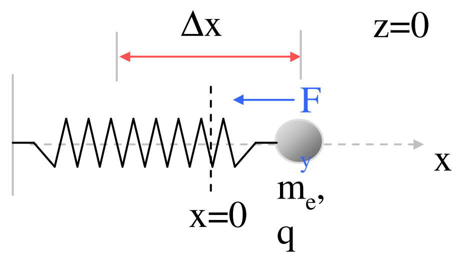
hesaplamak olacaktır. Bunun için atomun, elektronun sabit çekirdek etrafında hareketine dayanan ve kütle-yay sistemi gibi düşünüldüğü klasik modeli kullanılabilir

Optik sabitlerin Frekansa Bağlılığı-3

Işığın +z yönünde (kutuplanma x-doğrultusunda) ortamda ilerlediğini düşünürsek, dalga denklemi

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_o e^{i(kz-\omega t+\phi)} \qquad \text{Genlik} \qquad \vec{E}_o = E_o\hat{i}$$





z=0 noktasında alanın zamana göre değişimi $\vec{E}(0,t) = \vec{E}_o e^{-i\omega t}$

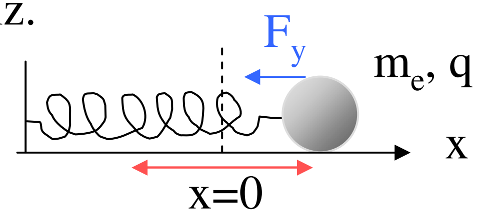
z=0 noktasında elektron üzerine etki eden kuvvet (*) $\vec{F} = e\vec{E}(0,t)$

Elektrik alan (ışığın) uygulandığında atomdaki elektronların dağılımı değişir, elektron denge konumu etrafında salınım yapmaya zorlanır.

*(*) EM dalganın manyetik alanının elektron üzerine uyguladığı Lorentz kuvveti (q**v**×**B**), **E** ile **B** karşılaştırıldığına göresiz hızlarda çok küçük olduğundan düşük hızlarda ihmel edilebilir.*

Optik sabitlerin Frekansa Bağlılığı-4

Atoma bağlı elektronun hareketini denge noktası etrafında harmonik titreşim yapan yay gibi düşünebiliriz.



$F_y = -kx$ k yay kuvveti

Bu salınım sırasında hıza bağlı olarak bir kayıp olacaktır. Enerji kaybını

$\gamma(\frac{dx}{dt}) = \gamma\dot{x}$ şeklinde yazabiliriz. Burada γ hızla orantılı kayıp katsayısıdır.

Elektronun hareket denklemi $m_e\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_{dıs}$ şeklinde yazılabilir.

Burada k, geri çağırıcı kuvvet sabiti, m_e elektronun kütlesi, x elektronun yerdeğiştirmesi ve $F_{dış}$ ise dışarıdan uygulanan kuvvettir (ışık durumunda elektrik kuvvet yani $F_{dış}$=eE).

Yukarıdaki denklem düzenlenirse

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m_e}\dot{x} + \frac{k}{m_e}x = F_{dıs}$$

2. dereceden, doğrusal, homojen olmayan diferansiyel denklem

Bu diferansiyel denklemin çözümü ⟹ x(t)=(homojen kısmının çözümü)+(özel çözüm)

Optik sabitlerin Frekansa Bağlılığı-5

Homojen kısmının ($F_{dış}$=0 durumunda) çözümü $x_h(t)$:

$$\ddot{x}+\frac{\gamma}{m_e}\dot{x}+\frac{k}{m_e}x=0 \qquad \text{Çözümün} \quad \Longrightarrow \quad x_h(t)=x_o e^{i\Omega t}$$

şeklinde olduğunu düşünebiliriz (burada Ω elektronun salınım frekansıdır).

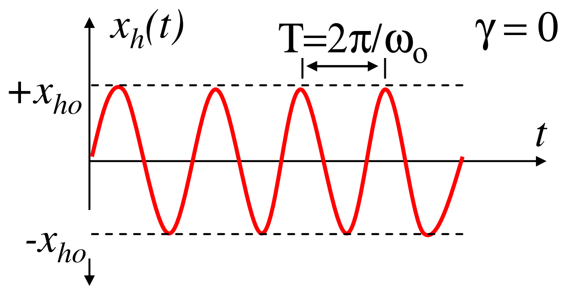
Çözümü yukarıdaki homojen denklemde yerine koyarsak

$$(-\Omega^2+\frac{k}{m_e}+i\Omega\frac{\gamma}{m_e})=0 \quad \Longrightarrow \quad \Omega_{\pm}=-\frac{i\gamma}{2m_e}\pm\sqrt{\frac{k}{m_e}-\frac{\gamma^2}{4m_e^{\,2}}}$$

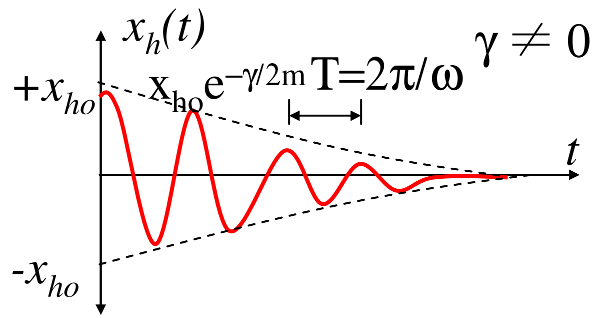
Eğer γ=0 => $\Omega_{\pm}=\pm\sqrt{\frac{k}{m_e}}\equiv\omega_o$ Bu terime rezonans frekansı denir.

Homojen kısmın açık çözümü $x_h(t)=x_o e^{i\left(\pm\sqrt{\left(\frac{k}{m_e}-\frac{\gamma^2}{4m_e}\right)}\right)} e^{-\frac{\gamma}{2m_e}t}$

Burada (γ/2m) ifadesi sönüm katsayısıdır.



Ortamda kayıp yok



Ortamda kayıp var

Optik sabitlerin Frekansa Bağlılığı-6

Özel kısmın ($F_{dış} \neq 0$ durumunda) çözümü $x_p(t)$:

$$F_{dıs} = -e\mathbf{E} = -e\mathbf{E_o}e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m_e}\dot{x} + \frac{k}{m_e}x = F_{dıs} = -e\mathbf{E}e^{-i\omega t}$$

Çözümün $x_p(t) = x_o e^{-i\omega t}$

şeklinde olduğunu düşünebiliriz (elektronun, dalganın ω frekansı ile salındığını düşünerek).

Bu durumda, elektronun yerdeğiştirmesi için aranan çözüm:

$$x_p(t) = (-\frac{eE_o}{m_e})\frac{1}{(-\omega^2 - i\omega\frac{\gamma}{m_e} + \frac{k}{m_e})}e^{-i\omega t}$$

Yukarıdaki ifadeyi rezonans frekansı (ω_o) cinsinden yazarsak özel çözüm:

$$x_p(t) = (\frac{e}{m_e})\frac{1}{(\omega^2 - \omega_o^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}E(t)$$

Optik sabitlerin Frekansa Bağlılığı-7

Genel çözüm $x(t)=x_h(t)+x_p(t)$

$T >> T=2\pi/\omega$ ⇨ $x_h(t>>T) => 0$

$x_p(t>>T) => x(t>>T) \cong (\frac{e}{m})\frac{E(t)}{(\omega^2-\omega_o^2+i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}$

T= dalganın periyodu

Homojen kısmın çözümü kısa zaman sonunda sıfıra gider.

x(t), elektronun dış elektrik alandan dolayı (+) yüklü iyona göre göreli yerdeğiştirmesidir. Bundan yola çıkarak dipol momentini tanımlamaya çalışırsak. Dipol momenti tanımından, **p**=q**d** atomun dipol momenti μ_{atom}

$$\mu_{atom} = |e|\, x(t)$$

Kutuplanma Vektörü **P**=(Toplam dipol moment)/Hacim

$$|\vec{P}| = \mu_{atom} N$$

Burada N birim hacim başına düşen atom sayısıdır. Kutuplanma vektörünü

$$\vec{P} = \varepsilon_o \chi \vec{E} = |e|\, \vec{x}(t) N$$ şeklinde yazabiliriz.

$$\vec{P} = \varepsilon_o \chi \vec{E}(t) = |e|\, \vec{x}(t) N = (\frac{e^2 N}{m_e})\frac{\vec{E}(t)}{(\omega^2-\omega_o^2+i\frac{\gamma}{m_e}\omega)} \Longrightarrow \chi(\omega) = (\frac{e^2}{\varepsilon_o m}N)\frac{1}{(\omega^2-\omega_o^2+i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}$$

Optik sabitlerin Frekansa Bağlılığı-8

$$\chi(\omega) = \left(\frac{e^2 N}{\varepsilon_o m_e}\right) \frac{1}{(\omega^2 - \omega_o^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}$$

Burada $\omega_p^2 \equiv \frac{Ne^2}{\varepsilon_o m_e}$ kısaltması yapılırsa ("*plazma frekansı*")

Plazma frekansı cinsinden elektrik duygunluk $\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_o^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}$

Buradan, maddenin elektrik geçirgenliğinin (ε) frekansa bağlılığı bulunabilir.

Elektrik yerdeğiştirme vektörü ***D***'nin tanımından

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_o E + P = \varepsilon_o E + \varepsilon_o \chi E = \varepsilon_o (1 + \chi) E$$

$$\varepsilon = \varepsilon_o [1 + \chi(\omega)] \quad \Rightarrow \quad \hat{\varepsilon} = \varepsilon_o + \frac{\varepsilon_o \omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_o^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}$$

Frekansa bağlı elektrik geçirgenlik

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_o + \frac{\varepsilon_o \omega_p^2 (\omega^2 - \omega_o^2 - i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + \frac{\gamma^2 \omega^2}{m_e^2}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{Re}\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_o + \dfrac{\varepsilon_o \omega_p^2 (\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2 \omega^2}{m_e^2}} \\ \operatorname{Im}\hat{\varepsilon}(\omega) = \dfrac{\varepsilon_o \omega_p^2 [(\gamma / m_e)\omega]}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2 \omega^2}{m_e^2}} \end{cases}$$

Herhangi bir kayıp karmaşık ε ifadesine neden olmaktadır!

ε ifadesi en genel durumu gösterir. Dielektrik ve iletken ortama göre uyarlanabilir.

Dielektrik Ortam-1

Dielektrik Durum (elektronların atoma bağlı olduğu durum) $k \neq 0$, $\omega_o \neq 0$ $\gamma \neq 0$

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_o + \frac{\varepsilon_o \omega_p^2 (\omega_o^2 - \omega^2 - i\dfrac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \dfrac{\gamma^2 \omega^2}{m_e^2}}$$

$$\hat{n}^2(\omega) = \hat{\varepsilon}/\varepsilon_o = \left[1 + \frac{\omega_p^2(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \dfrac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}\right] - i\left[\frac{\omega_p^2 \dfrac{\gamma}{m_e}\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \dfrac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}\right]$$

$$\operatorname{Re}\hat{n}^2(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \dfrac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}} \qquad \operatorname{Im}\hat{n}^2(\omega) = \frac{\varepsilon_o \omega_p^2 (\dfrac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \dfrac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}$$

$$\hat{n}(\omega) = n(\omega) + iK(\omega)$$

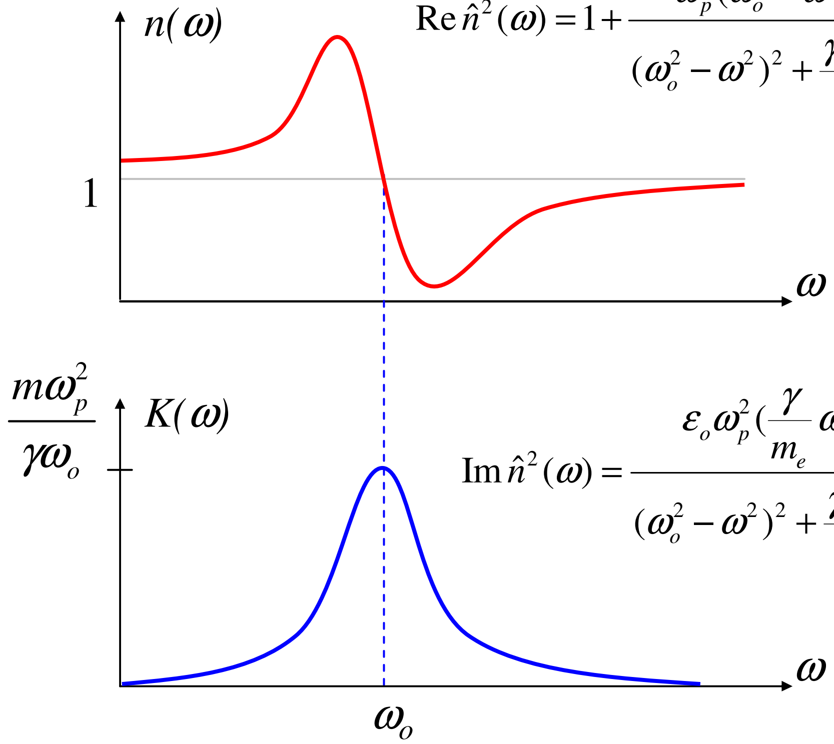
$$k \propto n(\omega) \quad \alpha \propto K(\omega)$$

Dielektrik Ortam-2

Kırılma indisinin gerçek ve sanal kısımlarını frekansa göre grafiğe geçirirsek:

Kırılma indisi frekansla artış göstermekte, bir maksimumdan sonra azalarak $\omega>\omega_o$ frekansından büyük frekans değerlerinde birden küçük bir değer alıp, daha sonra toparlanarak sabit bir değere ulaşmaktadır. Kırılma indisinin frekansa bağlı olması ***dağınım*** olarak adlandırılır. Dağınım bağıntısından dolayı gökkuşağı oluşur veya bir prizmadan kırılan beyaz ışık renklerine ayrılır.

Yoketme indisi, çok küçük bir değerden başlayarak frekansla yavaş artmakta, $\omega=\omega_o$ değerinde bir maksimuma ulaşarak artan frekanslarda tekrar azalarak sıfıra gitmektedir.



$$\mathrm{Re}\,\hat{n}^2(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_o^2-\omega^2)}{(\omega_o^2-\omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}$$

$$\mathrm{Im}\,\hat{n}^2(\omega) = \frac{\varepsilon_o\omega_p^2(\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega_o^2-\omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}$$

Düşük frekanslarda n(ω) $\mathrm{Re}\,\hat{n}(\omega\to 0) \cong \left(1+\frac{\omega_p^2}{\omega_o^2}\right)^{1/2} \equiv n_{statik}$ statik değer

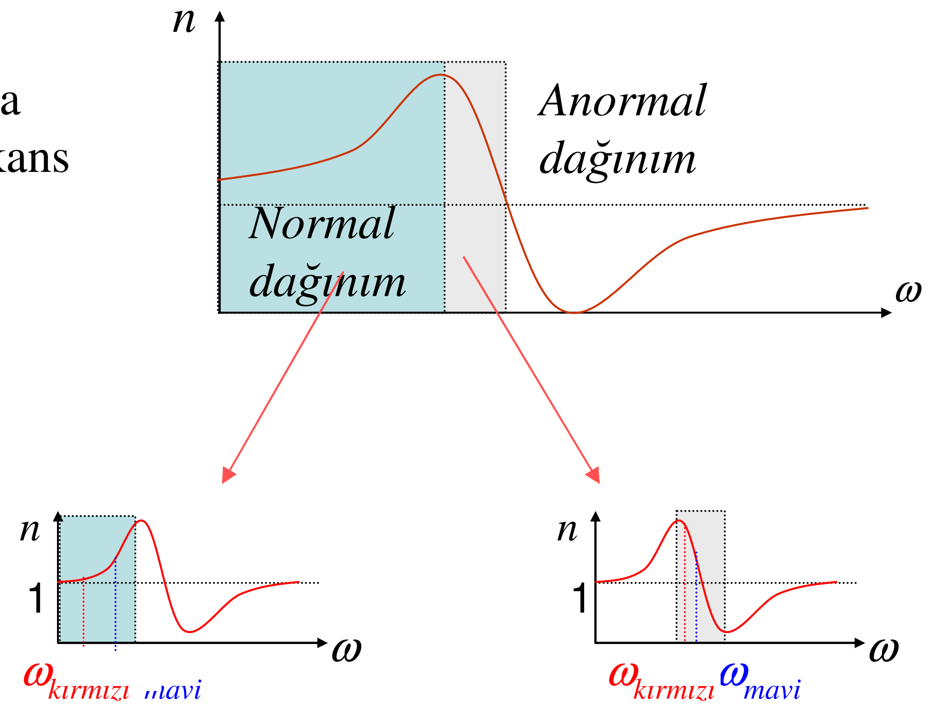
Yüksek frekanslarda n(ω) $\mathrm{Re}\,\hat{n}(\omega\to\infty) \equiv \varepsilon_\infty = 1$

Dielektrik Ortam-3

Kırılma indisinin frekansla değişimine bakılırsa, indisin frekansla arttığı ve azaldığı bölgeler fark edilir. Bu bölgelere normal ve anormal dağınım bölgeleri denir.

Normal dağınımda kırılma indisi frekans ile artar

$$\frac{dn}{d\omega} > 0$$



Normal dağınım

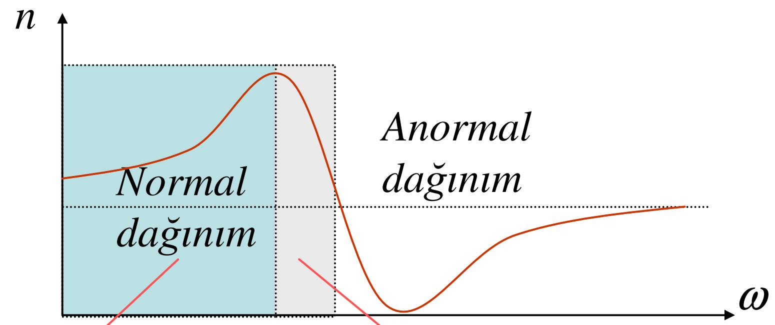
Anormal dağınım

Anormal dağınımda kırılma indisi frekans ile azalır

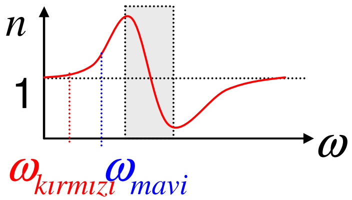
$$\frac{dn}{d\omega} < 0$$

Dağıtkanlık (Dispersion)-1

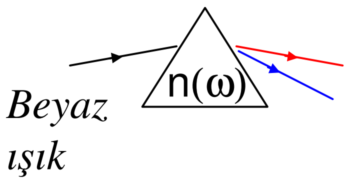
Normal ve anormal bölgeler ne anlama gelir?



$$\frac{dn}{d\omega} > 0$$

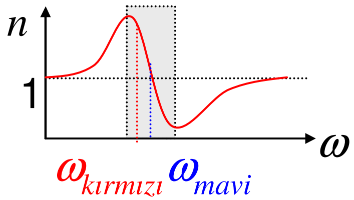


Normal dağınımda kırılma indisi frekans ile artacağından yüksek frekanslı ışığın göreceği kırılma indisi daha büyük olacak, daha büyük açılarda kırılacaktır.

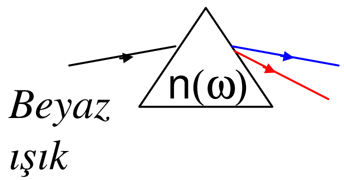


Normal dağınım

$$\frac{dn}{d\omega} < 0$$



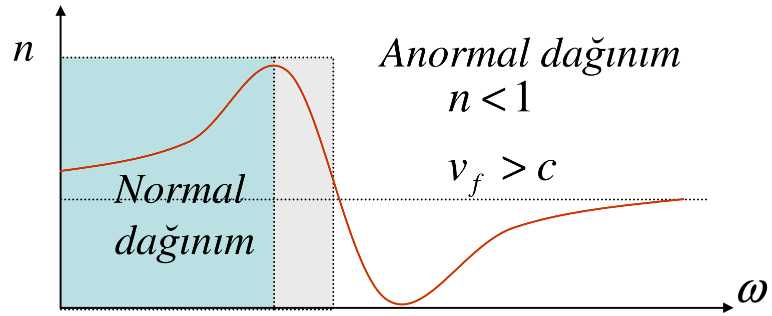
Anormal dağınımda kırılma indisi frekans ile azalacağından yüksek frekanslı ışığın göreceği kırılma indisi daha küçük olacak, daha küçük açılarda kırılacaktır.



Anormal dağınım

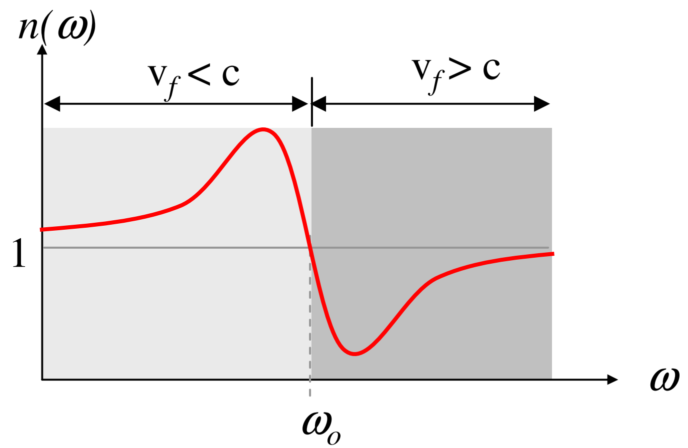
Dağıtkanlık-2

ω_o'ın üstündeki frekanslarda madde ortamındaki hız ışık hızından büyük görünmektedir. Bu hız aslında faz hızı olup fiziksel değildir; bilgi iletme hızı olan grup hızı ışığın boşluktaki hızından küçüktür!



Faz Hızı

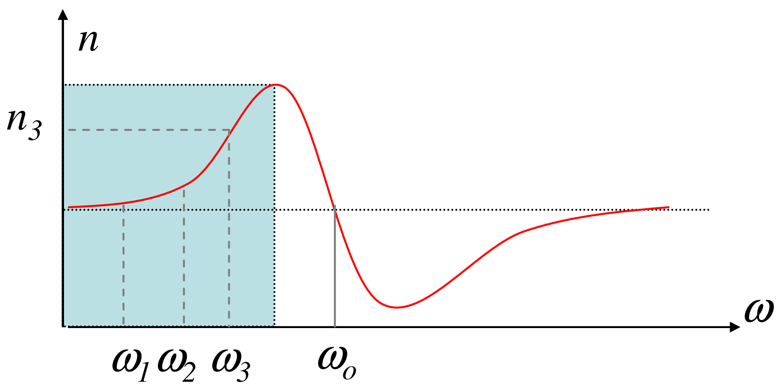
$$v_f = \frac{c}{n}$$



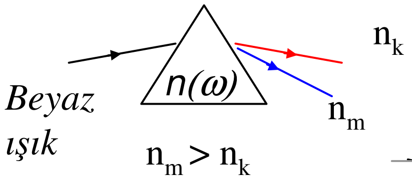
Grup Hızı

$$v_g = v_f \left(1 - \frac{k}{n}\frac{dn}{dk}\right)$$

Dağıtkanlık-3



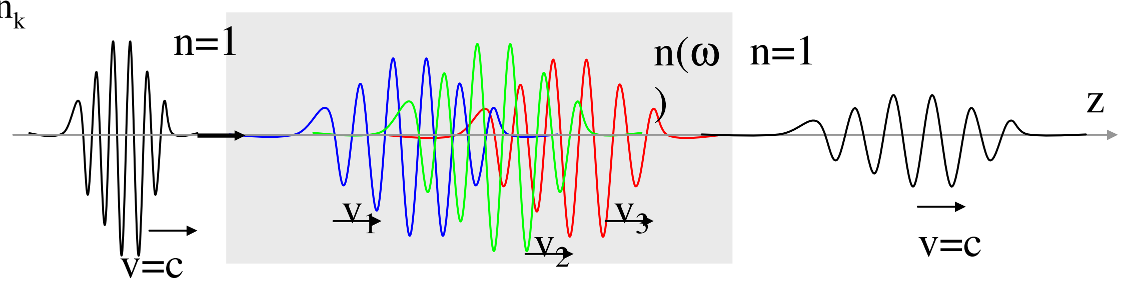
Kırılma indisinin frekansa bağlılığı (dağınım) birden çok frekans bileşenini içiren optik darbenin (pulse) ortamda ilerlemesine sınırlama getirir. Darbeyi oluşturan farklı frekanslardaki dalgaların her biri farklı hızlarda ilerleyeceğinden darbe bir süre sonra genişleyerek yayvanlaşacaktır. Bu durum özellikle optik iletişimi olumsuz yönde etkilemektedir.

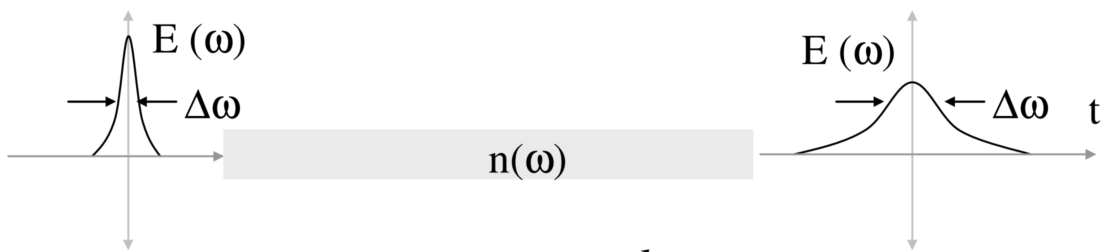


$n_m > n_k$

$v_m < v_k$

$$\omega(k) = \frac{c}{n(k)}k$$





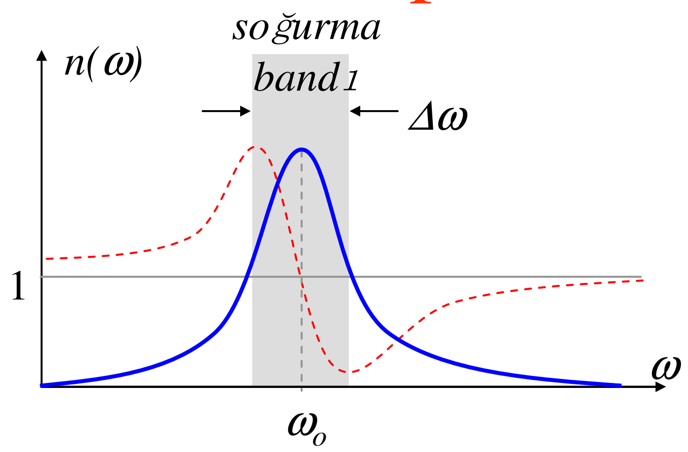
Soliton: dağınıma uğramayan dalga şekli

Grup hızı $$v_g = c\left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}\right)^{-1}$$

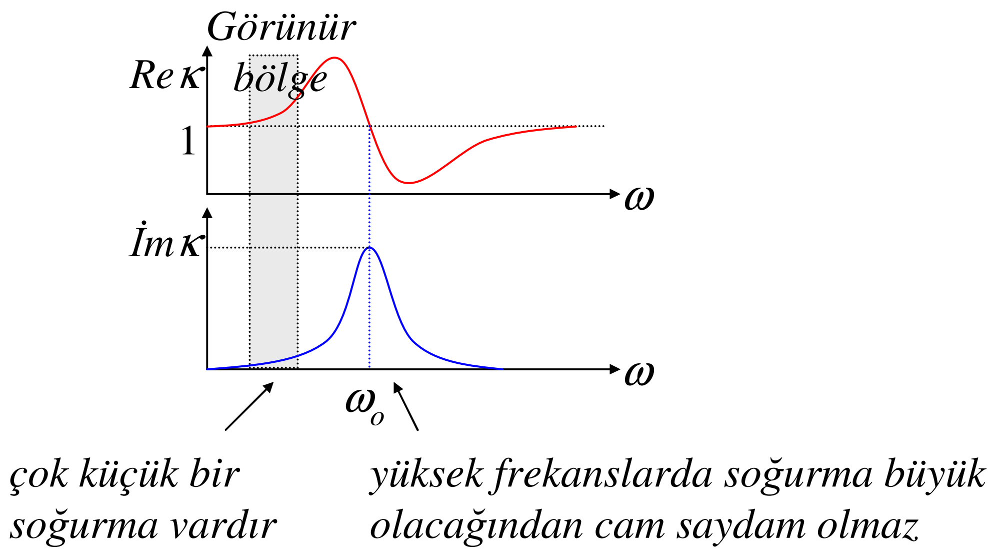
Grup hızını, boşluktaki hıza bağlayan yukarıdaki ifade tek dalga için yazılan forma benzetilebilir.

$$v_g = \frac{c}{N} \qquad N \equiv \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}\right)$$ Grup Kırılma İndisi

Soğurma (Absorption)-1



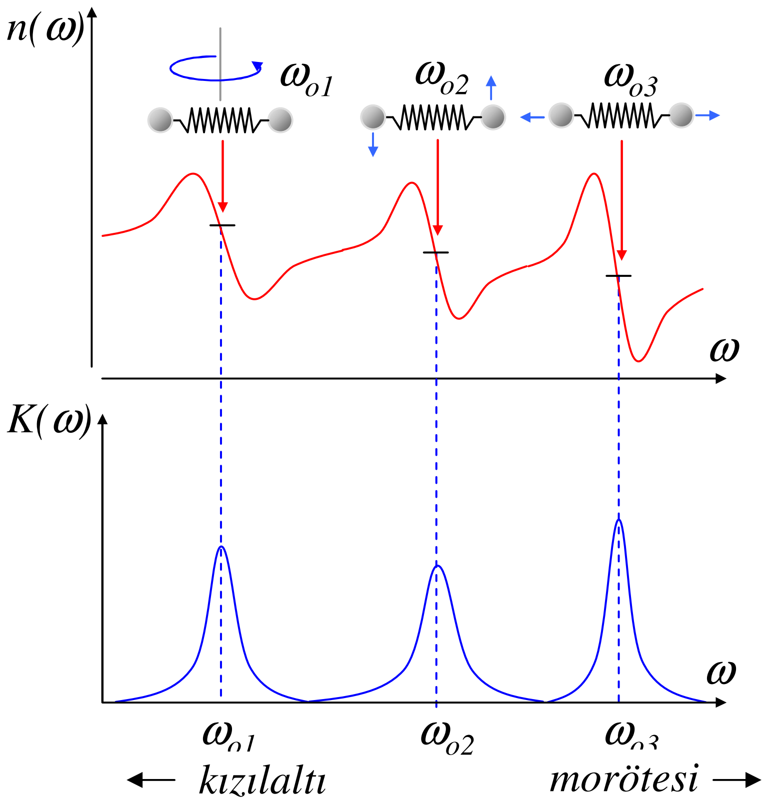
Optik sabitlerin frekansa bağlılığından bir malzemenin neden soğurucu olduğunu anlayabiliriz. Rezonans frekansına yakın frekanslarda yoketme indisi büyük değerler alacağından bu bölgede soğurma çok büyük olacaktır, bu bölgenin dışındaki frekanslarda ise malzeme saydam olacaktır. Örneğin camın rezonans frekansı görünür bölgenin dışında olduğu için cam görünür bölgede ışığı soğurmaz olmaz, bu nedenle saydamdır.



Soğurma-2

Şimdiye kadar tek bir rezonans frekans (ω_o) düşündük. Eğer farklı frekanslarda madde içinde soğurma olursa bu durumda dielektrik sabiti aşağıdaki şekilde birden çok rezonans frekansını içerecek şekilde yazılır.

$$\hat{\kappa}(\omega) = 1 - \sum_i \frac{\omega_p^2 \left(\omega^2 - \omega_{oj}^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega\right)}{(\omega^2 - \omega_{oj}^2)^2 + i\frac{\gamma^2}{m_e^2}\omega^2}$$



İletken Ortam-1

İletkenler için (bağlı elektronlar veya dipoller yerine serbest elektronlar) yay sabiti $k=0 \rightarrow \omega_o=0$; fakat $\gamma \neq 0$ olduğu için elektrik geçirgenlik ifadesi farklı bir şekil alır:

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_o + \frac{\varepsilon_o \omega_p^2 (\omega_o^2 - \omega^2 - i\dfrac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \dfrac{\gamma^2 \omega^2}{m_e^2}} \quad \xrightarrow{\omega_o=0} \quad \hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_o - \frac{\varepsilon_o \omega_p^2 (\omega^2 + i\dfrac{\gamma}{m_e}\omega)}{\omega^4 + \dfrac{\gamma^2 \omega^2}{m_e^2}}$$

$$\hat{\kappa}(\omega) = \frac{\hat{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon_o} = \hat{n}^2$$

ε ifadesi a+ib şeklinde yeniden düzenlenirse

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \left[\varepsilon_o - \frac{\varepsilon_o \omega_p^2 \omega^2}{\omega^4 + \dfrac{\gamma^2 \omega^2}{m_e^2}}\right] + i\left[\frac{\varepsilon_o \omega_p^2 \dfrac{\gamma}{m_e}}{\omega^4 + \dfrac{\gamma^2 \omega^2}{m_e^2}}\right] \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(n^2(\omega)) = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + \dfrac{\gamma^2}{m_e^2}} \\ \dot{I}m(n^2(\omega)) = \dfrac{\omega_p^2 (\gamma / m_e)}{\omega^3 + \dfrac{\gamma^2}{m_e^2}\omega} \end{cases}$$

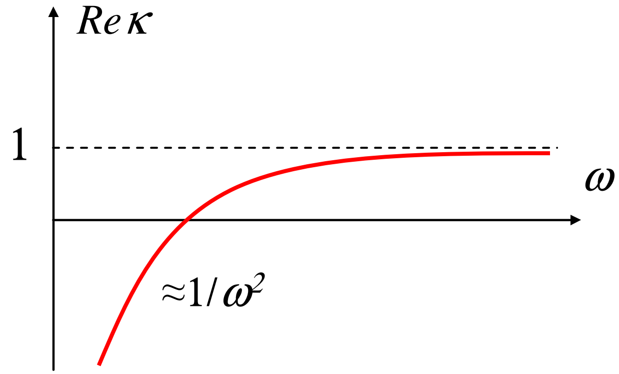
Metal ortam

İletken Ortam-2

Metal ortamda kırılma ve yok etme indisinin frekansa bağlılığı dielektrik ortamdan farklıdır. Grafiklerden de görüldüğü gibi bağlı elektronlar olmadığı için bir rezonans frekansı yoktur.

Kırılma indisi

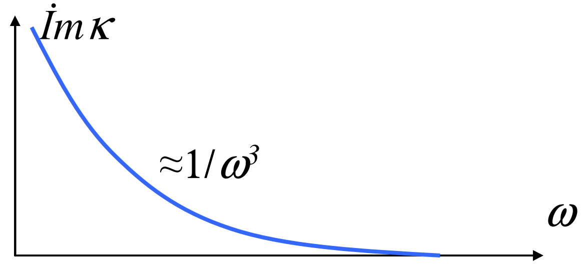
$$\mathrm{Re}\,\hat{\kappa}(\omega) = n^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \dfrac{\gamma^2}{m_e^2}}$$



Metallerde kırılma indisi, düşük frekanslarda negatif bir değerden başlayıp $1/\omega^2$ şeklinde artarak sıfırdan geçtikten sonra yüksek frekanslarda sabit bir değere ulaşır. Kırılma indisinin belli bir frekans değerinin altında sıfır veya negatif olması karmaşık kırılma indisinin tümüyle sanal olacağına dikkat edin.

Yoketme indisi

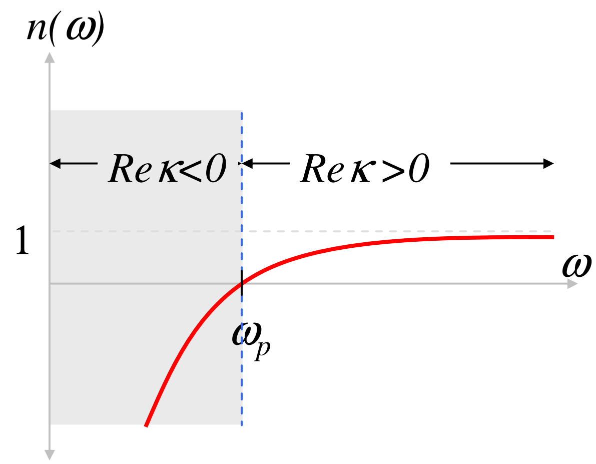
$$\mathrm{Im}\,\hat{\kappa}(\omega) = K^2(\omega) = \frac{\omega_p^2(\gamma/m_e)}{\omega^3 + \dfrac{\gamma^2}{m_e^2}\omega}$$



Metallerde yoketme indisi düşük frekanslarda büyük bir değerden başlayarak başlayarak $1/\omega^3$ şeklinde azalarak, yüksek frekanslarda sıfıra gider. Bu sebeptendir ki yüksek frekanslarda soğurma olmayacağı için optik elemanlar metallerden yapılır.

Plazma Frekansı-1

İletken ortamda dielektrik sabiti κ'nın gerçek kısmının Re(κ)=0 olduğu duruma bakalım:



$$\mathrm{Re}\,\hat{\kappa}(\omega) = n^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \dfrac{\gamma^2}{m_e^2}}$$

ω_p:Plazma frekansı

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_o m_e}}$$

N= Serbest elektron yoğunluğu (birim hacim başına)

Re(κ)=0 $\Rightarrow$ $$0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \dfrac{\gamma^2}{m_e^2}}$$

$\omega >> \gamma/m_e$ durumunda $\Rightarrow$ $$0 \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \Rightarrow \omega = \omega_p$$

Metallerde plazma frekansında kırılma indisi sıfır, üstünde pozitif, altında ise tümüyle sanaldır.

Metallerde plazma frekansının altında kırılma indisi tümüyle sanal!

Plazma Frekansı-2

Bazı metallerin plazma frekansı (ω_p) ve plazma dalgaboyları (λ_p)

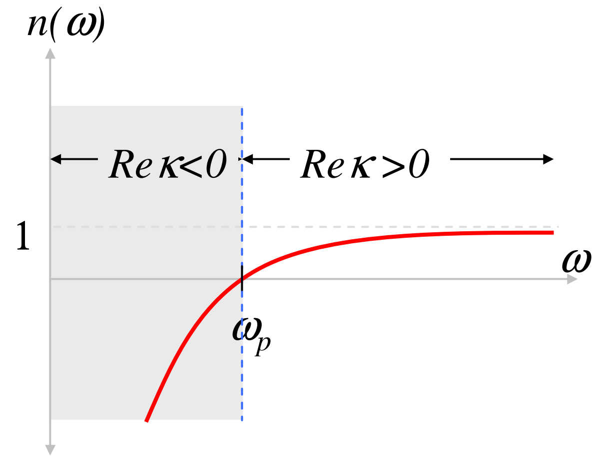
$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_o m_e} \qquad \lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p}$$

Metal	Değerlik	N (10^{28} m^{-3})	ω_p (10^{16} Hz)	λ_p (nm)
Bakır (Cu)	1	8.47	1.64	115
Gümüş (Ag)	1	5.86	1.36	138
Altın (Au)	1	5.90	1.37	138
Manganez(Mg)	2	8.61	1.65	114
Aluminyum (Al)	3	18.1	2.40	79

Plazma Frekansı-3

Plazma frekansı altındaki frekanslarda dielektrik sabiti negatif olduğundan kırılma indisi n=iα tümüyle karmaşık sayıdır. Bu durumda ortamın optik özellikleri nasıl olur?

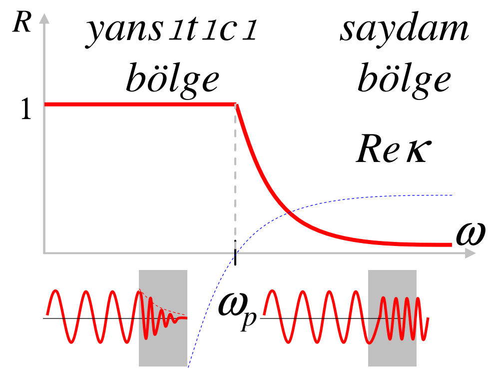
$$n \cong \sqrt{\mathrm{Re}\,\hat{\kappa}} \qquad \mathrm{Re}\,\hat{\kappa} < 0$$



Yansıtma katsayısını $R = \left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right|^2$

Havadan metal yüzeye gelen dalga için
Yansıtma katsayısı R (n_1=1 hava, n_2=iα)

$$R = \left|\frac{i\alpha - 1}{i\alpha + 1}\right|^2$$



z: karmaşık sayı

$$\boxed{\left|\frac{z}{z^*}\right|^2 = 1}$$

$$R = \left|\frac{i\alpha - 1}{i\alpha + 1}\right|^2 = \left|\frac{(-1)(1 - i\alpha)}{1 + i\alpha}\right|^2 = (1)\left|\frac{1 - i\alpha}{1 + i\alpha}\right|^2 = 1$$

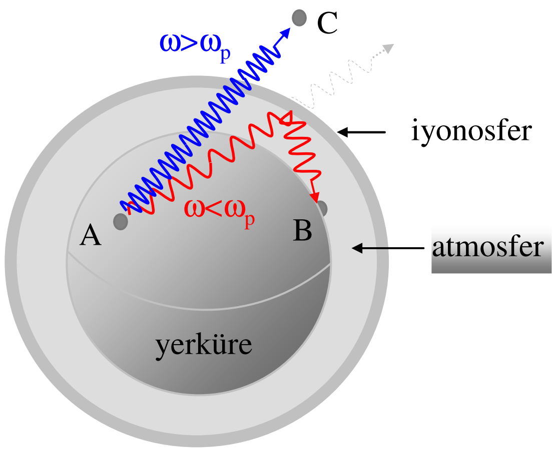
Yansıtma katsayısı (R=1 olduğundan, dalganın hepsi yansıyacak! (Mükemmel ayna)

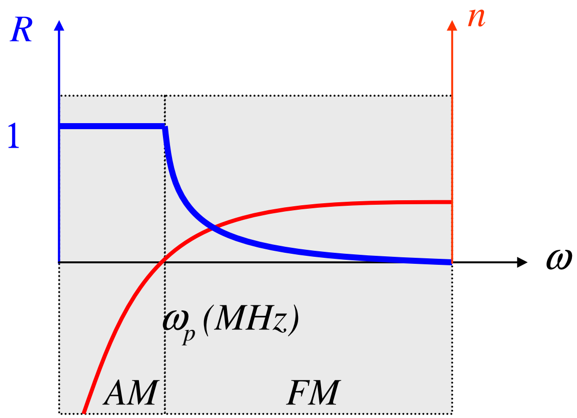
Plazma Frekansı-4

İletken ortamın bu özelliğinin teknolojik uygulamaları nedir?

Güneşten gelen UV ışınları atmosferin üst tabakasındaki atomları iyonlaştırarak bir çeşit plazma katmanı oluştururlar (iyonosfer).

İyonosfer tabakasının plazma frekansı MHz mertebesindedir.

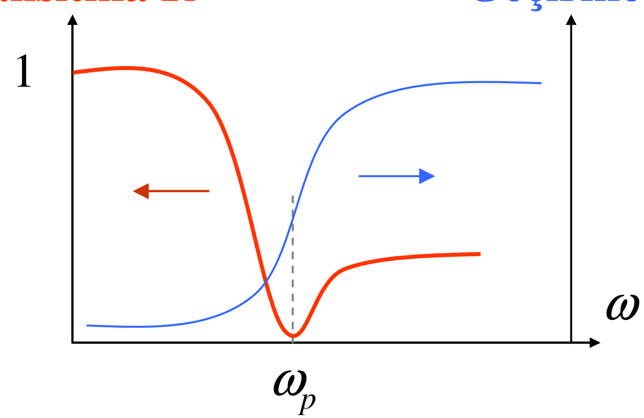




Dünya üzerindeki A ve B noktaları arasındaki iletişim için kullanılacak EM dalganın frekansı ω_p'nin altında olmalıdır (AM radyo dalgaları)

EM dalganın frekansı C noktası için ise ω_p'nin üstünde olmalıdır (FM dalgaları)

Plazma Frekansı-5



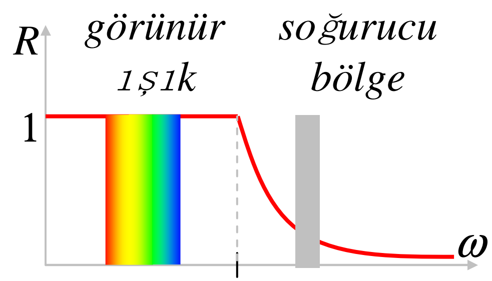
Basit metaller için plazma frekansı morötesi bölgededir.

Al	λ_p= 810 A	$\hbar\omega_p$ (Al)=15.3 eV
Na	λ_p= 2170 A	$\hbar\omega_p$ (Na)=5.7 eV

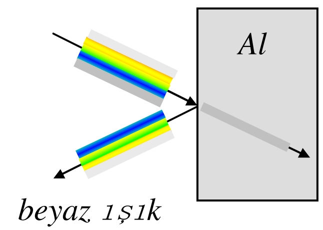
Plazma frekansı, görünür bölgede metallerin neden çok iyi yansıtıcı olduklarını da açıklar.

- Alüminyumun rengi görünür bölgedeki bütün ışığı yansıttığından beyazımsıdır.
- Altının, serbest elektronun yanı sıra bant arası geçişi (4 eV) civarında olduğundan sarımsı renkte görünür.

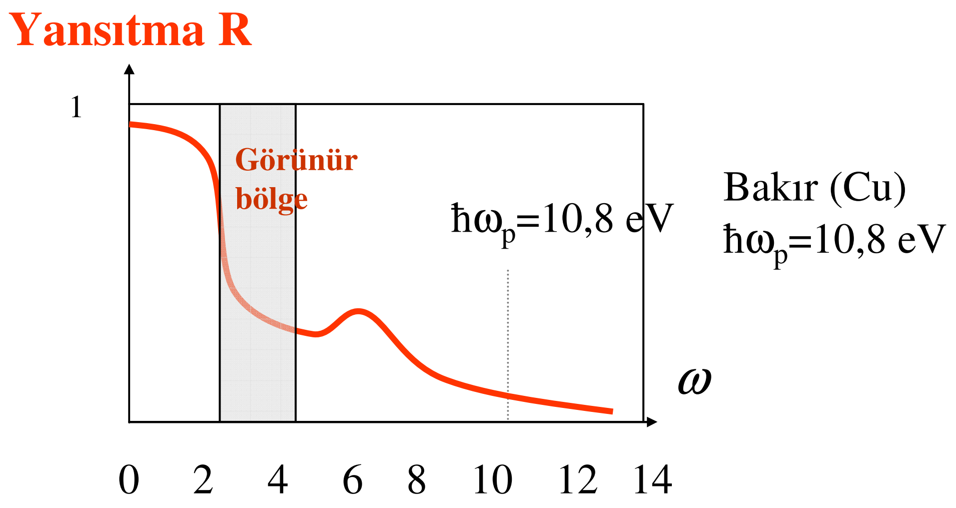
Alüminyum (Al) ve gümüş (Ag) yaygın olarak ışık yansıtmada ayna olarak kullanılmaktadır.



ω_p=2.5x10[16] Hz



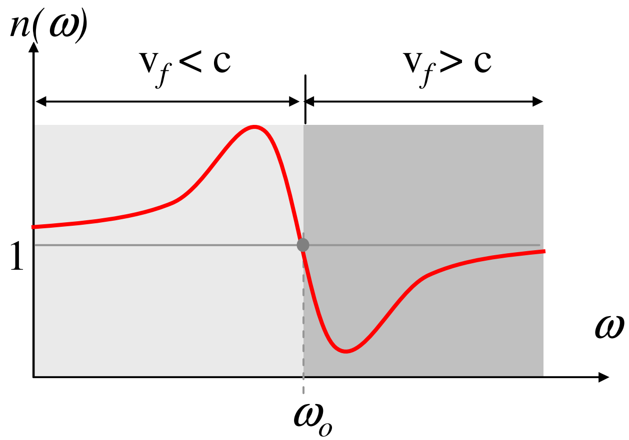
Bakırın Optik Spektrumu



Bakırın renginin (10,8 eV) beyaz olmasını bekleriz ancak serbest elektronların yanında bantlararası geçişten (2 eV) dolayı kırmızımsı renkte görünür.

Madde Ortamında Faz ve Grup Hızları

- Dağınım bağıntısı n(ω) yakından incelendiğinde ilginç özellikler sergilediği görülür. Örneğin ışığın frekansı ortamın rezonans frekansına eşit ($\omega=\omega_o$) olduğunda kırılma indisi boşluktaki değerini (n=1) alır, üstünde ise birden küçük (n<1) bir değer alır.
- Bu durum, kırılma indisinin tanımı hatırlandığında, ışığın ortamdaki hızının boşluktaki hızından daha büyük olacağı anlamına gelmektedir ki bu da, ışık hızının bilgi iletiminde üst sınır olduğunu öngören genel göreliliğin sonuçları ile çelişmektedir.



- Gerçekten de madde ortamında bilgi hızı ışık hızından daha büyük olamaz!

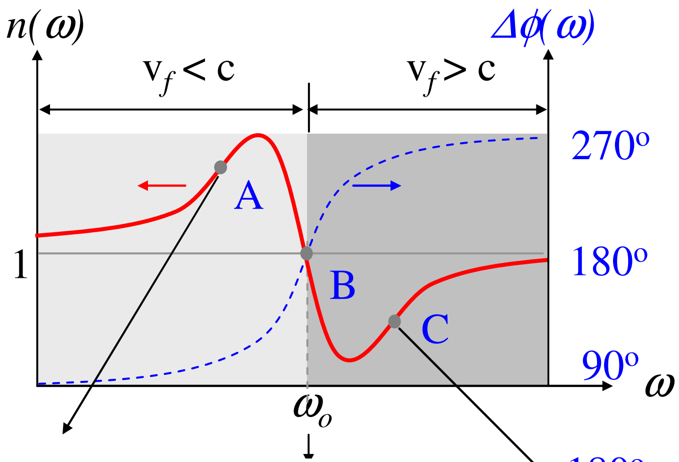
- n<1 durumuna karşı gelen hız aslında bilgi iletim hızı değil modüle edilmemiş tek frekanslı bir dalganın *faz hızıdır*; bu durum ikincil dalgalarla açıklanabilir.

Madde Ortamında Faz ve Grup Hızları

• Kırılma indisi, madde ortamında ilerleyen dalganın (birincil dalgalar), alan tarafından uyarılan ortamdaki dipollerin yayınladığı aynı frekanslı dalgaların (ikincil dalgalar) girişimi sonucunda oluşan yeni dalganın eş faz yüzeylerinin hızını, yani faz hızını göstermektedir.

• Rezonans frekansının altında (A) dipollerin yayınladıkları ikincil dalgalar ışığın ortamda oluşturduğu birincil dalgaların gerisinde (δ<0), rezonans frekansının üstünde (C) ise birincil dalgaların ilerisindedir (δ>0). Faz hızı, birincil ve ikincil dalgaların girişimi sonucu oluşan eş faz yüzeylerinin hızı olduğundan rezonans frekansının üstünde faz hızı ışık hızından büyük olabilmektedir.

Bilgi iletim hızı faz hızı ile değil modüle edilmiş dalgalarla iletildiğinden bilginin iletim hızı, faz hızının ışık hızından büyük olduğu frekans bölgesinde bile ışık hızından daha büyük olamaz!

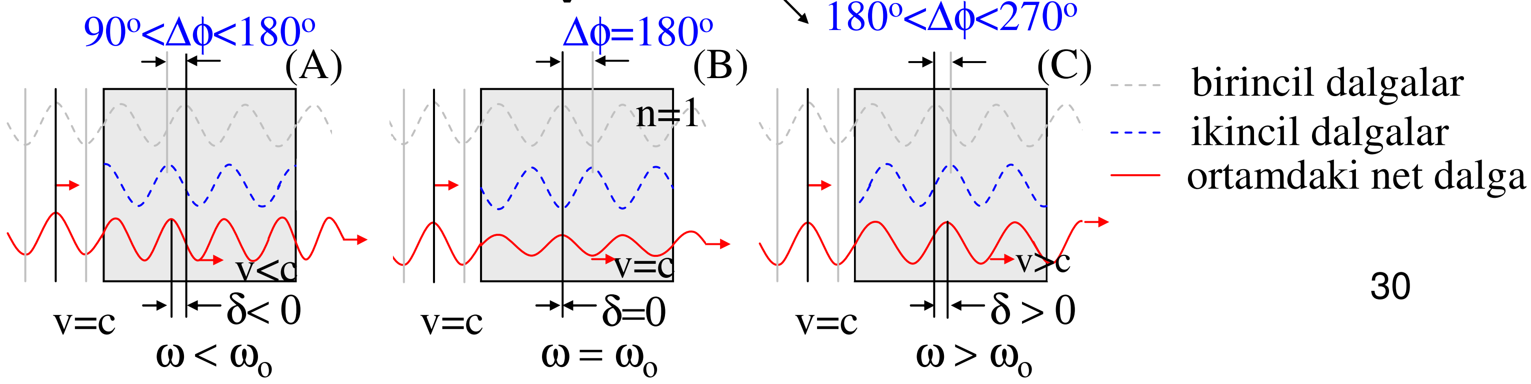


Anormal bölgede soğurma büyük olduğu için bu aralıkta grup hızı tanımı da bilgi iletim hızı şeklinde yorumlanamaz.

$$v_g = \frac{v_f}{\left(1 + \dfrac{\omega}{n}\dfrac{dn}{d\omega}\right)}$$

$$v_f = \omega / k = c / n$$

$$v_g = \partial\omega / \partial k$$



Soğurma ve Dağıtkanlık Arasındaki İlişki: Kramers-Kronig Bağıntısı

- Malzemenin optik özelliklerini belirleyen ve karmaşık sayı ile ifade edilen kırılma indisinin gerçek ve sanal kısımları birbirinden bağımsız değildir.

$$\hat{n}(\omega) = n(\omega) + iK(\omega)$$

- Gerçek ve sanal indislerden birinin frekansa bağlılığı bütün frekans aralıklarında tam olarak biliniyor ise diğer indis aşağıda verilen *Kramers-Kronig bağıntısı* yardımı ile bulunabilir.

Gerçek kısım (kırılma indisi)

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \boldsymbol{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

Sanal kısım (yoketme indisi)

$$K(\omega) = -\frac{1}{\pi} \boldsymbol{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(\omega') - 1}{\omega - \omega'} d\omega'$$

Burada P, integralin başlıca değeri (principle values of integral) integral üzerindeki tekil noktaların (ω=ω') dahil edilmeden alınan integral değeridir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(\omega')-1}{\omega-\omega'} d\omega' = \lim_{\eta \to o} \left[\int_{-\infty}^{\omega-\eta} \frac{n(\omega')-1}{\omega-\omega'} d\omega' + \int_{\omega+\eta}^{\infty} \frac{n(\omega')-1}{\omega-\omega'} d\omega' \right]$$

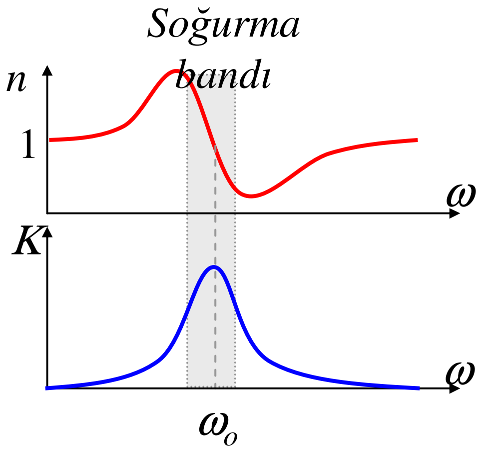
Özet

Dielektrik ortamın optik özelliklerini rezonans frekansı (ω_o) belirler. Rezonans frekansına yakın bölgede ortam soğurucu, bu bandın dışında ise ortam saydamdır.

Dielektrik ortam

$$n^2(\omega) = \mathrm{Re}\left[\hat{n}^2(\omega)\right] = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}$$

$$K^2(\omega) = \dot{I}m\left[\hat{n}^2(\omega)\right] = \frac{\omega_p^2(\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}$$

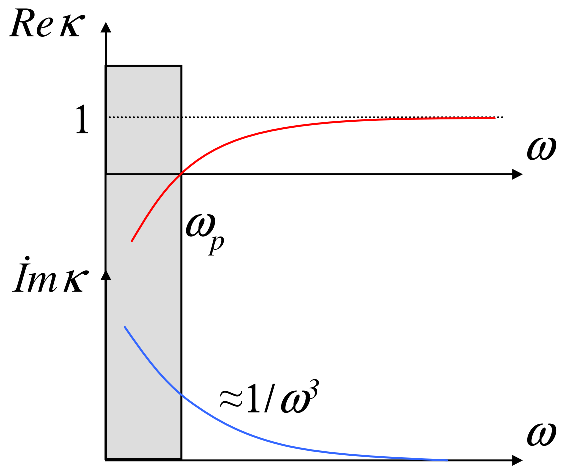


Metallerin optik özelliklerini ise plazma frekansı (ω_p) belirler. Serbest taşıyıcıların yoğunluğu ile orantılı olan rezonans frekansının altındaki frekanslarda ortam mükemmel yansıtıcıdır.

İletken ortam

$$n^2(\omega) = \mathrm{Re}\left[\hat{n}^2(\omega)\right] = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \frac{\gamma^2}{m^2}}$$

$$K^2(\omega) = \dot{I}m\left[\hat{n}^2(\omega)\right] = \frac{\omega_p^2(\frac{\gamma}{m})}{\omega^3 + \frac{\gamma^2}{m^2}}$$



UADMK - Açık Lisans Bilgisi