

Bölüm 5: Işığın Kutuplanması Alıştırmalar

5.1 Genlikleri farklı $E_{ox} \neq E_{oy}$ ve aralarındaki faz farkı $\delta = \pm\pi/2$

$$E_x(z, t) = E_{ox} \cos(kz - \omega t)$$

$$E_y(z, t) = E_{oy} \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2})$$

olarak verilen ışığın

$$\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 = 1$$

elips denklemini sağladığını gösteriniz.

(b) Faz farkının herhangi bir δ olduğu durumunda en genel elips denklemini

$$\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)\cos(\delta) = \sin^2(\delta)$$

sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

(a)

$$\frac{E_x}{E_{ox}} = \cos(kz - \omega t)$$

$$\frac{E_y}{E_{oy}} = \cos(kz - \omega t) \cos \delta - \sin(kz - \omega t) \sin \delta$$

$$\frac{E_y}{E_{oy}} - \frac{E_x}{E_{ox}} \cos \delta = -\sin(kz - \omega t) \sin \delta$$

$$\sin(kz - \omega t) = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}} - \frac{E_x}{E_{ox}} \cos \delta\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2\right] \sin^2 \delta$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 = 1$$

(b) Faz farkının δ olduğu durumunda en genel olarak elips denkleminin

$$\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)\cos(\delta) = \sin^2(\delta)$$

$$\frac{E_x}{E_{ox}} = \cos(kz - \omega t)$$

$$\frac{E_y}{E_{oy}} = \cos(kz - \omega t)\cos\delta - \sin(kz - \omega t)\sin\delta$$

$$\frac{E_y}{E_{oy}} - \frac{E_x}{E_{ox}}\cos\delta = -\sin(kz - \omega t)\sin\delta$$

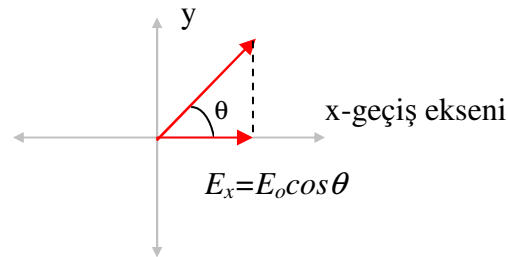
$$\sin(kz - \omega t) = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}} - \frac{E_x}{E_{ox}}\cos\delta\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2\right)\sin^2\delta$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)\cos(\delta) = \sin^2(\delta)$$

- 5.2 Işık şiddeti I_o olan kutuplanmamış ışığın ideal (soğurma yok!) bir doğrusal kutuplayıcıdan (örneğin x-yönlü doğrusal kutuplayıcı) geçtikten sonra şiddetinin yarıya düştüğünü gösteriniz.

Çözüm:



$$E_x = E_o \cos\theta$$

$$I \propto (E_x)^2 = (E_o \cos\theta)^2 = I_o \cos^2\theta$$

Kutuplanmamış ışık gelişigüzel doğrultuda olduğundan θ açısının bütün değerlerinde eşit olasılıkla kutuplayıcıya gelir. Bu durumda yukardaki ifadenin ortalaması alındığında

$$I \propto \langle I_o \cos^2 \theta \rangle = I_o \left(\frac{1}{2} \right) = I_o/2$$

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

5.3 Kutuplanma doğrultusu aşağıda verilen ışığa dik yönde kutuplanmış ışığın E_2 Jones vektörlerini bulunuz ve xy düzleminde şeklini çiziniz

a) $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

b) $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$

Çözüm:

a) $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

Diklik koşulu iki vektörün skaler çarpımından bulunabilir.

A.B=0

Vektörler karmaşık vektör olduğundan vektör çarpımında vektörün eşleniğinin yazılması gerekir.

A.B*=0

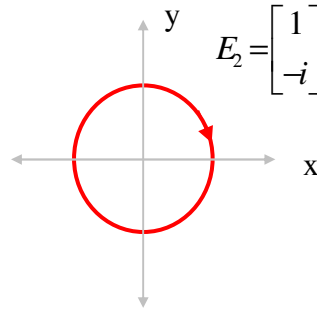
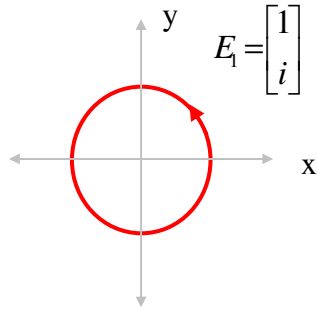
Buna göre:

$$E_1 \cdot E_2^* = 0 \Rightarrow E_2 = \begin{bmatrix} e_{21} \\ e_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow E_1 \cdot E_2^* = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{21}^* & e_{22}^* \end{bmatrix} = (1) \cdot (e_{21}^*) + (i) \cdot (e_{22}^*) = 0$$

$$e_{21}^* = -i(e_{22}^*)$$

$$\text{Buradan } e_{21}^* = 1, e_{22}^* = i \Rightarrow E_2^* = \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix} \Rightarrow e_{21} = 1, e_{22} = -i \Rightarrow E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

E_2 'nin Jones gösterimi $E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ şeklindedir ve sağ el yönünde dairesel kutupludur.



(veya $e_{21}^* = -i, e_{22}^* = 1$ da bir çözümdür ancak aynı şeyi verir)

$$e_{21}^* = -i, e_{22}^* = 1 \quad E_2^* = \begin{bmatrix} -i & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e_{21} = i, e_{22} = 1 \Rightarrow E_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

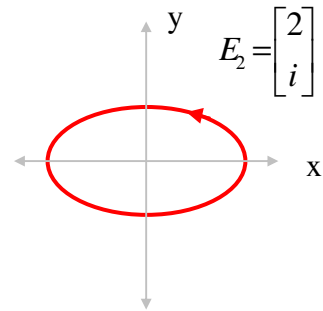
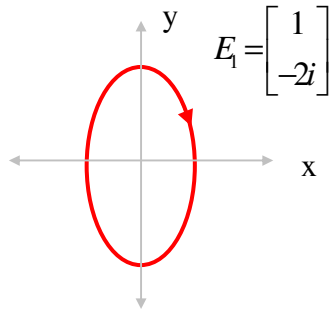
$$d) E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

$$E_1 \cdot E_2^* = 0, E_2 = \begin{bmatrix} e_{21} \\ e_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow E_1 \cdot E_2^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{21}^* & e_{22}^* \end{bmatrix} = (1) \cdot (e_{21})^* + (-2i) \cdot (e_{22})^* = 0$$

$$e_{21}^* = 2i \quad (e_{22}^*)$$

$$\text{Buradan } e_{21} = 2, e_{22}^* = -i \quad E_2^* = \begin{bmatrix} 2 & -i \end{bmatrix} \Rightarrow e_{21} = 2, e_{22} = i \Rightarrow E_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

E_2 'nin Jones gösterimi $E_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}$ şeklindedir ve *sol el yönünde eliptik* kutupludur.



(veya $e_{21}^* = 2i, e_{22}^* = 1$ da bir çözümdür ancak aynı şeyi verir)

$$e_{21}^* = 2i, e_{22}^* = 1 \quad E_2^* = \begin{bmatrix} 2i & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e_{21} = -2i, e_{22} = 1 \quad E_2 = \begin{bmatrix} -2i \\ 1 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

5.4 Sağ ve sol el yönünde kutuplanmış ışığın birbirine dik olduklarını gösteriniz.
 $E_R \cdot E_L^* = 0$

Çözüm:

$$E_R = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad E_L = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad E_L^* = \begin{bmatrix} 1 & +i \end{bmatrix} \quad E_R \cdot E_L^* = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i \cdot i \\ 1+i \cdot i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.5 Öyle bir optik kutuplayıcı bulun ki, bir yöndeki dairesel kutuplu ışığı tümü ile geçirirken, diğer yönde dairesel kutuplu ışığı bloke etsin.

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a - ib = 1$$

$$c - id = -i \Rightarrow 2a=1, 2c=-i, 2ib=-1, 2id=i \Rightarrow a=1/2, b=i/2, c=-i/2, d=1/2$$

$$a + ib = 0$$

$$c + id = 0$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

5.6 Şiddeti 4 W/cm^2 ve yatay eksen ile 30° lik açı yapacak şekilde düzlemsel kutuplanmış ışık önce Çeyrek dalga plakasına, daha sonra sağ el kutuplu dairesel kutuplayıcıdan geçtikten sonra kutuplanma doğrultusunu ve ışık şiddetini bulunuz.

Çözüm:

$$\tan 30^\circ = \frac{E_{oy}}{E_{ox}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{E_{oy}}{E_{ox}} \Rightarrow E_{ox} = \sqrt{3}E_{oy}$$

$$E_{30^\circ} = E_{oy} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$I_i = \frac{1}{2} \epsilon_o c E_{30^\circ} \cdot E_{30^\circ}^* = 4 \text{ W/cm}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_o c E_{oy}^2 \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \epsilon_o c E_{oy}^2 \cdot (3+1)$$

$$I_i = 4 \text{ W/cm}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_o c E_{oy}^2 \cdot (3+1) = 2 \epsilon_o c E_{oy}^2 \Rightarrow E_{oy} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_o c}}$$

$$E_{30^\circ} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_o c}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{\lambda/4} = J_{\lambda/4} \cdot E_{30^\circ} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \cdot \sqrt{\frac{2}{\epsilon_o c}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_o c}} \begin{bmatrix} \sqrt{3}+0 \\ 0+i \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_o c}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ i \end{bmatrix}$$

$$J_{\text{SagEl-Dairesel}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_R = J_R \cdot E_{\lambda/4} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \cdot \sqrt{\frac{2}{\epsilon_o c}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2\epsilon_o c}} \begin{bmatrix} \sqrt{3}+i \\ -i\sqrt{3}+1 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2\epsilon_o c}} (\sqrt{3}-1) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Işık sağ el yönünde dairesel kutuplanmıştır.

Çıkan ışığın şiddeti

$$I_i = \frac{1}{2} \epsilon_o c E_R \cdot E_R^* = \frac{1}{2} \epsilon_o c \left(\sqrt{\frac{1}{2\epsilon_o c}} (\sqrt{3}-1) \right)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix} = \frac{1}{4} (\sqrt{3}-1)^2 (1+1)$$

$$I_i = \frac{1}{2} (\sqrt{3}-1)^2 \cong 0.025 \text{ W/cm}^2$$

olarak bulunur.