Bölüm 2: Boşlukta Elektromanyetik Dalga (Işık)
Alıştırmalar

2.1 Herhangi bir f(x-vt) ve g(x+vt) gibi sürekli fonksiyonların dalga denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial (x-vt)} . \frac{\partial (x-vt)}{\partial x} \quad => \quad \frac{\partial f}{\partial x} = f^{'}.1 \quad ==> \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f^{''}.1$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial (x-vt)} . \frac{\partial (x-vt)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial (x-vt)} .(-v) \quad ==> \quad \frac{\partial f}{\partial t} = (-v).f^{'} \quad ==> \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f^{''}.(v^2)$$

$$f^{''} = \frac{1}{v^2} f^{''}.v^2 \Rightarrow f^{''} = f^{''}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial (x+vt)} . \frac{\partial (x+vt)}{\partial x} \quad => \quad \frac{\partial g}{\partial x} = g^{'}.1 \quad ==> \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = g^{''}.1$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial (x+vt)} . \frac{\partial (x+vt)}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial (xgvt)} .(v) \quad ==> \quad \frac{\partial g}{\partial t} = (v).g^{'} \quad ==> \quad \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = v^2.g^{''}$$

$$g^{''} = \frac{1}{v^2} g^{''}.v^2 \Rightarrow g^{''} = g^{''}$$

2.2 Maxwell denklemlerini sağlayan manyetik alanın da dalga denklemini sağladığını ve dalganın ilerleme hızının ışık hızında olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

4. Maxwell denkleminin $\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{H}} = \varepsilon_o \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$ dönüsü alınırsa

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{H}}) = \varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{E}})$$

elde edilir. Bu ifadedeki elektrik alanın dönüsü yerine 3. Maxwell denklemi $\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\mu_o \frac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t}$ kullanılırsa

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{H}}) = -\varepsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t^2}$$

sadece manyetik alanı içeren ifade elde edilir. Yukarıdaki ifadenin sol tarafı vektörel eşitlik $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{H}}) = -\nabla^2 \vec{\boldsymbol{H}} + \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{H}})$ kullanılarak yeniden yazılırsa

$$-\nabla^2 \vec{\boldsymbol{H}} + \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{H}}) = -\varepsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t^2}$$

Maxwell'in 2. eşitliğinden $\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{H}} = 0$ olduğundan

Dalga denklemini sağlayan manyetik alan

$$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{H}} = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t^2}$$

elde edilir. Dalganın hızı $c^2 = 1/\varepsilon_o \mu_o$ dir.

2.3 MKS birim sisteminde verilen

$$E_x(x,t) = 0, E_y(x,t) = 2\cos\left[2\pi\times10^{14}(t - x/c)\right], E_z(x,t) = 0$$

ışık dalgasını düşünelim.

a) Bu dalganın, frekansı, dalgaboyu, yayılma doğrultusu, genliği ve elektrik alanın uzaysal yönelimi (kutupluluğu) nedir?
b) Bu dalganın manyetik alan bileşeni için bir ifade türetin.

Çözüm:

a) Bu dalganın, frekansı, dalgaboyu, yayılma doğrultusu, genliği ve elektrik alanın uzaysal yönelimi (kutupluluğu) nedir?

$$\vec{E} = 2\cos\left[2\pi\times10^{14}(t - x/c)\right]\hat{j}$$

Alanın en genell ifadesi

$$\vec{E} = E_o \cos(kx - \omega t + \phi)\hat{j}$$

Soruda verilen ifade genel dalga formatında yeniden yazılırsa

$$\vec{E} = 2\cos\left[(\frac{2\pi\times10^{14}}{c})x - (2\pi\times10^{14})t + \phi\right]\hat{j} = E_o\cos\left[kx - \omega t + \phi\right]\hat{j}$$

Yayılma doğrultusu (+x)

Frekans:

$$\omega = 2\pi\times10^{14}\ rad/s$$

Dalga vektörü

$$k = \frac{2\pi\times10^{14}\ (rad/s)}{c\ (m/s)} = \frac{2\pi\times10^{14}\ (rad/s)}{3\times10^{8}\ (m/s)} \cong 2\times10^{6}\ rad/m$$

Dalgaboyu

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{c\ (m/s)}{10^{14}(1/s)} = \frac{3\times10^{8}(m/s)}{10^{14}(1/s)} = 3{,}0\times10^{-6}\ m = 3{,}0\ \mu m$$

Hız

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\times10^{14}\ rad/s}{\left(\dfrac{2\pi\times10^{14}}{c}\ rad/m\right)} = 3{,}0\times10^{8}\ m/s$$

Genlik

$E_o = 2\ V/m$

Kutuplanma doğrultusu

$\vec{E} = E_o\hat{j}$ y-doğrultusunda

b)

$$-\mu_o\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left(0 - \frac{\partial E_y(x-\omega t)}{\partial z}\right) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}\left(\frac{\partial E_y(x-\omega t)}{\partial x} - 0\right)$$

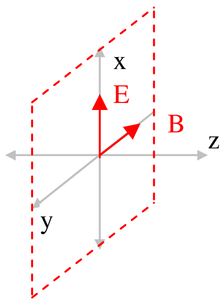
$$-\mu_o\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \left(\frac{2\pi\times10^{14}}{c}\right)2\sin\left[2\pi\times10^{14}(t-x/c)\right]\hat{k}$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mu_o}\left(\frac{2\pi\times10^{14}}{c}\right)\int\left(2\sin\left[2\pi\times10^{14}(t-x/c)\right]\hat{k}\right)dt$$

$$\vec{H} = -\frac{2}{\mu_o c}\cos\left[2\pi\times10^{14}(t-x/c)\right]\hat{k}$$

Manyetik alan -z doğrultusunda, yayılma doğrultusu +x

2.4 (a) Şekilde gösterilen elektromanyetik dalganın yayılma doğrultusunu ve yönünü bulunuz.



(b) Elektrik alanı genliği $\vec{E}_o = E_{ox}\hat{i}$ manyetik alan genliği $\vec{H}_o = \frac{H_{ox}}{\sqrt{2}}(\hat{j}+\hat{k})$ olarak verilen elektromanyetik alanın yayılma doğrultusunu ve yönünü (dalga vektörünü) bulunuz.

Çözüm:

(a)Yayılma doğrultusu k, Poynting vektöre paraleldir.

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$$

Poynting vektörün yönü bulunursa dalganın yayılma doğrultusu da bulunmuş olur.

$$\vec{S} = \hat{i}E\times(-\hat{j}H) = -E.H(\hat{i}\times\hat{j}) = (E.H)(-\hat{k})$$

Görüldüğü gibi dalga -z yönünde ilerlemektedir.

(b) Benzer şekilde Poynting vektör

$$\vec{k}_o \propto \vec{S} = \vec{E}_o \times \vec{H}_o = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ E_{ox} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H_{ox}}{\sqrt{2}} & \frac{H_{ox}}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 0.\hat{i} - \hat{j}(\frac{H_{ox}}{\sqrt{2}} E_{ox} - 0) + (\frac{H_{ox}}{\sqrt{2}} E_{ox} - 0)\hat{k}$$

$$\vec{k}_o \propto \vec{S} = \vec{E}_o \times \vec{H}_o = (\frac{E_{ox} H_{ox}}{\sqrt{2}})(-\hat{j} + \hat{k})$$

2.5 Genlikleri, frekans ve dalga vektörleri aynı, x doğrultusunda kutuplanmış, +z ve –z doğrultusunda ilerleyen ve aralarında 180° faz farkı olan iki elektromanyetik dalganın duran dalga oluşturduğunu gösteriniz.

Çözüm:
(a)

$E_{1x}(z,t) = E_o sin\left[kz - \omega t\right]$ $\qquad$ $E_{2x}(z,t) = E_o sin\left[kz + \omega t + 180^o\right]$

$E_x(z,t) = E_{1x} + E_{2x} = E_o sin\left[kz - \omega t\right] + E_o sin\left[kz + \omega t\right]$

$sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ olduğu hatırlanırsa

$E_x(z,t) = 2E_o \sin(kz)\cos(\omega t)$

Bu dalga ilerleyen dalga (x-vt) formunda değildir, duran dalga formundadır.

2.6 Duran dalgaların enerji iletiminin sıfır olduğunu gösteriniz.

Çözüm:
Duran dalgaları $\vec{E}(z,t) = E_x(z,t)\hat{i} = \left[2E_o \sin(kz) cos(\omega t)\right]\hat{i}$ şeklinde ifade edebiliriz.

Enerji akısı

$$\vec{S} = \vec{E} \times (\vec{B}/\mu_o)$$

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{j}\left[-\frac{\partial}{\partial z} E_x(z,t)\right] = \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{j} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{j} = k(2E_o \cos kz \cos \omega t)\hat{j}$$

$$\vec{B} = -\frac{k}{\omega}(2E_o \cos kz \sin \omega t)\hat{j}$$

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ E_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = (E_x B_y)\hat{k} = (2E_o \sin kz \cos \omega t)(2\frac{E_o}{c}\cos kz \sin \omega t)\hat{k}$$

$$\vec{S} = (\frac{4E_o^2}{c})(\sin kz \cos kz)(\sin \omega t \cos \omega t)\hat{k}$$

$\sin\alpha\cos\alpha = 0$ olduğundan

$$\vec{S} = (\frac{4E_o^2}{c})(\sin kz \cos kz)(\sin \omega t \cos \omega t)\hat{k} = 0$$

2.7 Enerji, elektron volt (eV) olarak ifade edilirse, dalgaboyu ve enerji arasındaki ilişkiyi veren ifadenin

$$E(eV) = \frac{1,245}{\lambda(\mu m)}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda_o} \Rightarrow E = \frac{h}{c\lambda_o}$$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E(J) = \frac{\left(6.64\times10^{-34}\, J-s\right)\left(3\times10^{8}\, m/s\right)}{\lambda(m)}$$

$$E(eV) = \frac{\left(6.64\times10^{-34}\, J-s\right)\left(3\times10^{8}\, m/s\right)}{\lambda(m)}\left[\frac{\left(1/1.6\times10^{-19}\,(eV/(J-s)\right)}{\left(1\times10^{-6}\,(\mu m/m\right)}\right] = \frac{1,245}{\lambda_o(\mu m)}$$

2.8 Kırmızı ışığın (λ=7000 A) sahip fotonun enerji ve momentumunu hesaplayınız.

Cevap:

$$p = \hbar k = (\frac{6,626\times10^{-34}\, Js}{2\pi})(\frac{2\pi}{7000\times10^{-10}\, m}) = 9,5\times10^{-28}\ kg(m/s)$$

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda_o} = (6,626\times10^{-34}\, Js)(\frac{3\times10^{8}\, m/s}{7000\times10^{-10}\, m}) = 2,84\times10^{-19}\, J = 1,77\ eV$$