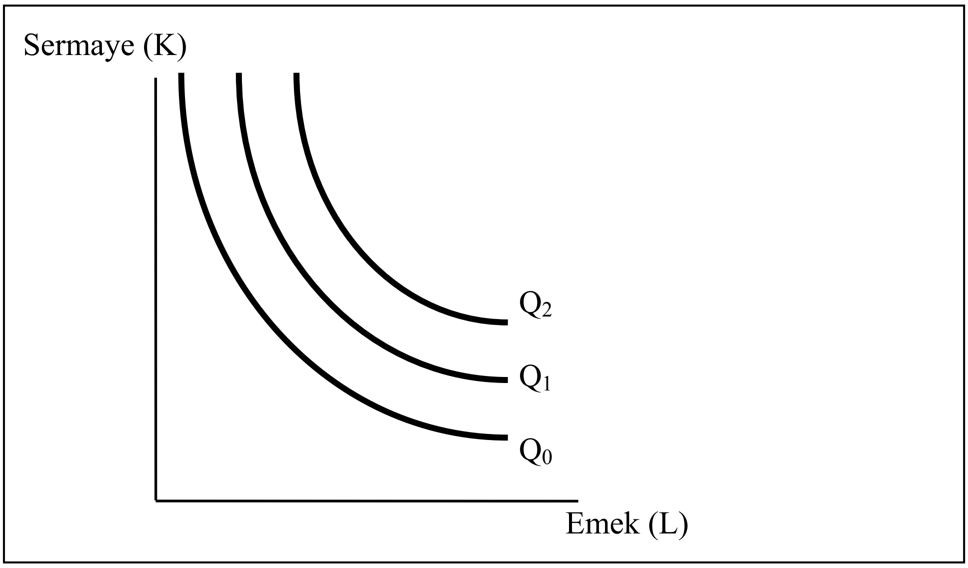
MALİYET MİNİMİZASYONU

1. En Düşük Maliyette Üretim

1.1. Girdi İkamesi

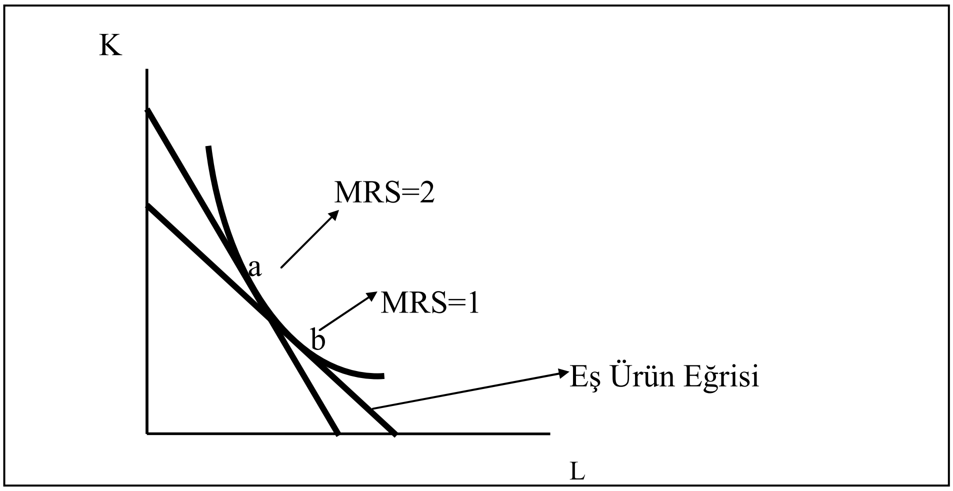
Girdi ikamesi, emek ve sermayenin birbiri yerine kullanılabilmesidir. Sermaye için emeğin marjinal ikame oranı, çıktı sabitken birim emek artışının karşıladığı sermaye azalışının oranıdır.

Azalan marjinal ikame oranı yasası, bir noktadan sonra üretimin aynı düzeyde kalabilmesi için ikame edilen girdinin azalana göre daha fazla artmasıdır. Eş ürün eğrileri vasıtasıyla marjinal ikame oranını gösterebiliriz. **(Şekil l)**

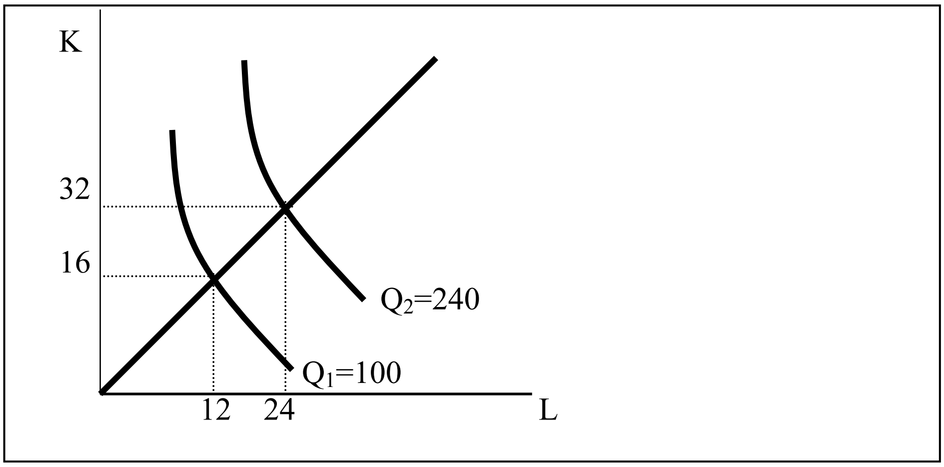


Şekil 1. Eş Ürün Eğrileri

Eş ürün veri çıktı için emek ve sermayenin çeşitli bileşimlerini göstermektedir. Eğri üzerinde sol yukarıya ve sol aşağıya doğru gittikçe emek ve sermayeye bağlı olarak marjinal ikame oranları düşmektedir. Marjinal ikame oranı eş ürün eğrisinin eğimine eşittir. **(Şekil 2)** (Marjinal ikame oranı, marjinal teknik ikame oranı olarak da adlandırılmaktadır)

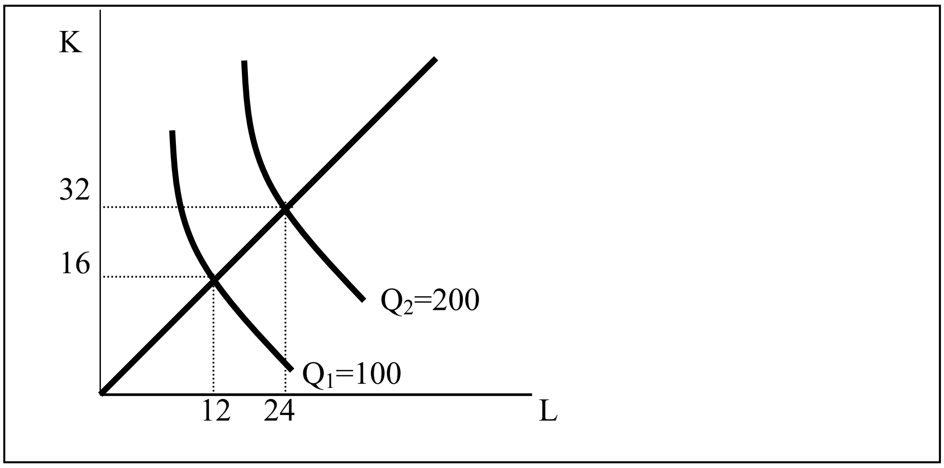


Şekil 2. Marjinal İkame Oranı



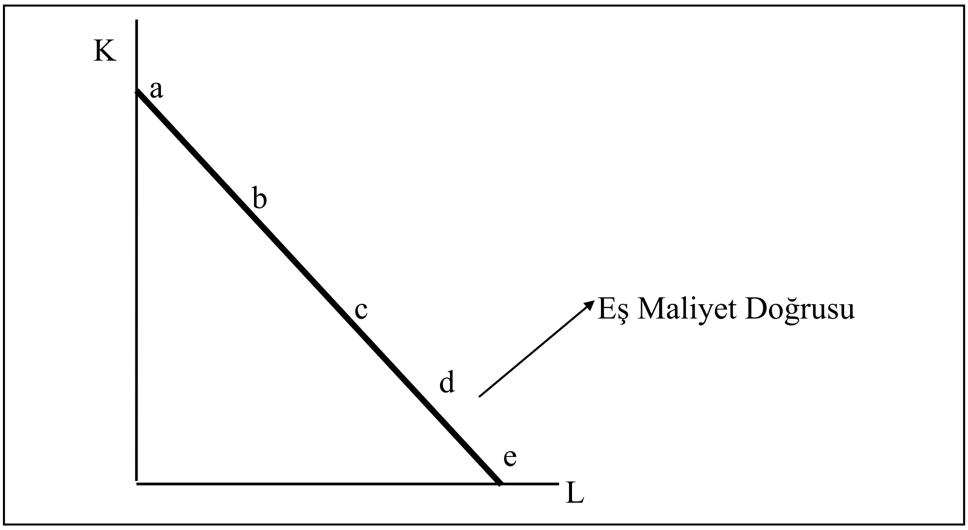
Şekil 3. Ölçeğe Göre Artan Getiri

Eş ürün eğrileri vasıtasıyla, ölçek ekonomilerini de incelemek olanaklıdır. **Şekil 3**'de ölçeğe göre artan, **Şekil 4**'de ölçeğe göre sabit getiri durumunda eş ürün eğrilerinin aldığı şekiller görülmektedir.



Şekil 4. Ölçeğe Göre Sabit Getiri

1.2. Eş Maliyet Doğrusu



Şekil 5. Eş Maliyet Doğrusu

Eş maliyet doğrusu, veri toplam maliyetle satın alınabilir, sermaye ve emek bileşimlerini gösterir. **(Şekil 5)**

$P_L L + P_K K = TC$ dir.

Buradan,

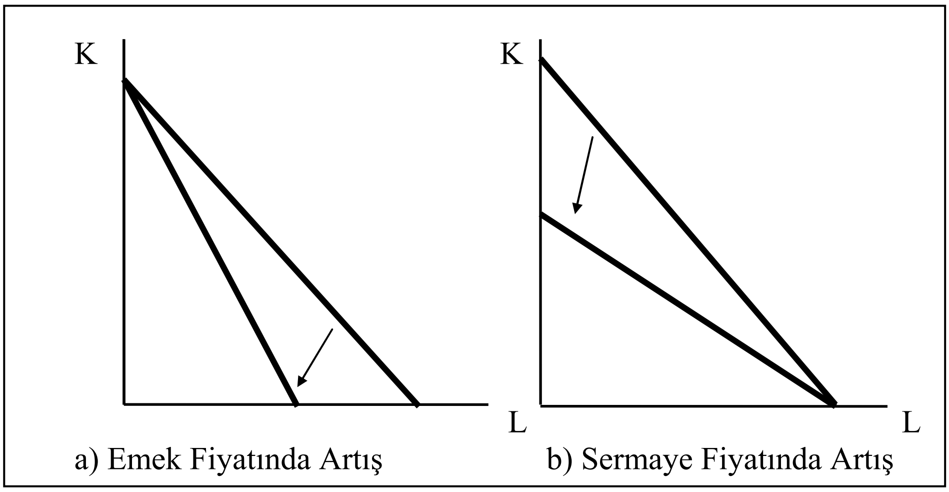
$$K = \frac{TC}{P_K} - (\frac{P_L}{P_K})L \text{ dir.}$$

P_L = Emeğin fiyatı, P_K = Sermayenin Fiyatıdır.

Aynı biçimde emek miktarı bulunabilir. Eş maliyet doğrusunun eğimi, girdilerin nispi fiyatına bağlıdır.

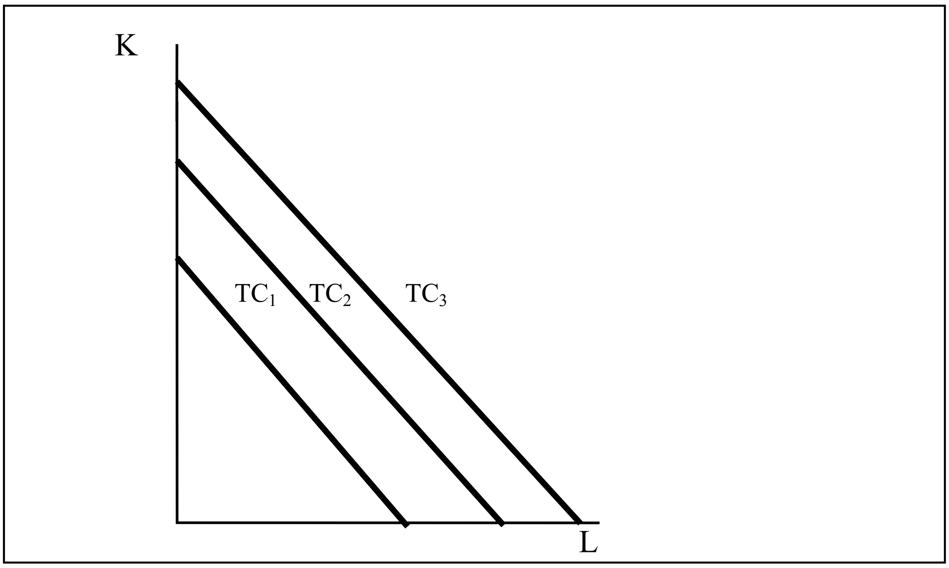
Yani $\frac{P_L}{P_K}$ dır.

Girdi fiyatlarına bağlı olarak eş maliyet doğrularının eğimi değişmektedir **(Şekil 6)**.



Şekil 6. Girdi Fiyatlarında Değişme ve Eş Maliyet Doğrusu

Eş maliyet haritası, eş maliyet doğrularının bir serisidir. **(Şekil 7)**

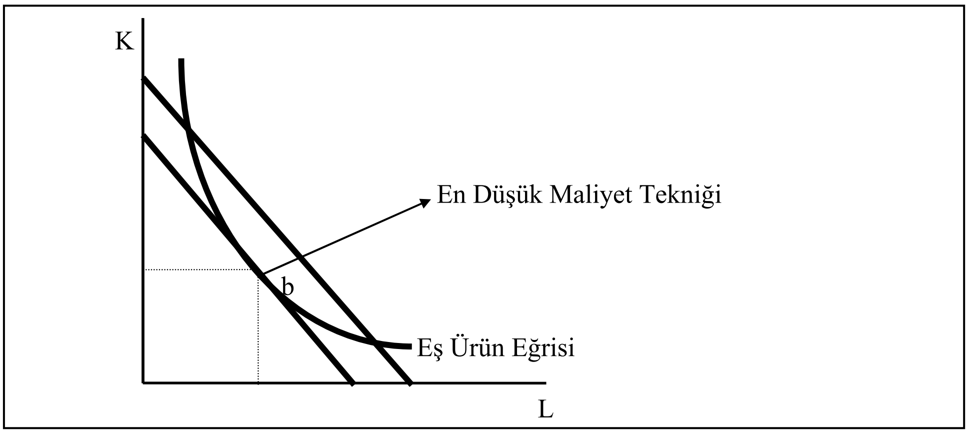


Şekil 7. Eş Maliyet Haritası

Bunların her biri farklı toplam maliyetleri göstermektedir.

1.3. En Düşük Maliyet Tekniği

En düşük maliyet tekniği, veri çıktıda üretimin toplam maliyetlerini minimize eden girdi bileşimidir. **(Şekil 8)**



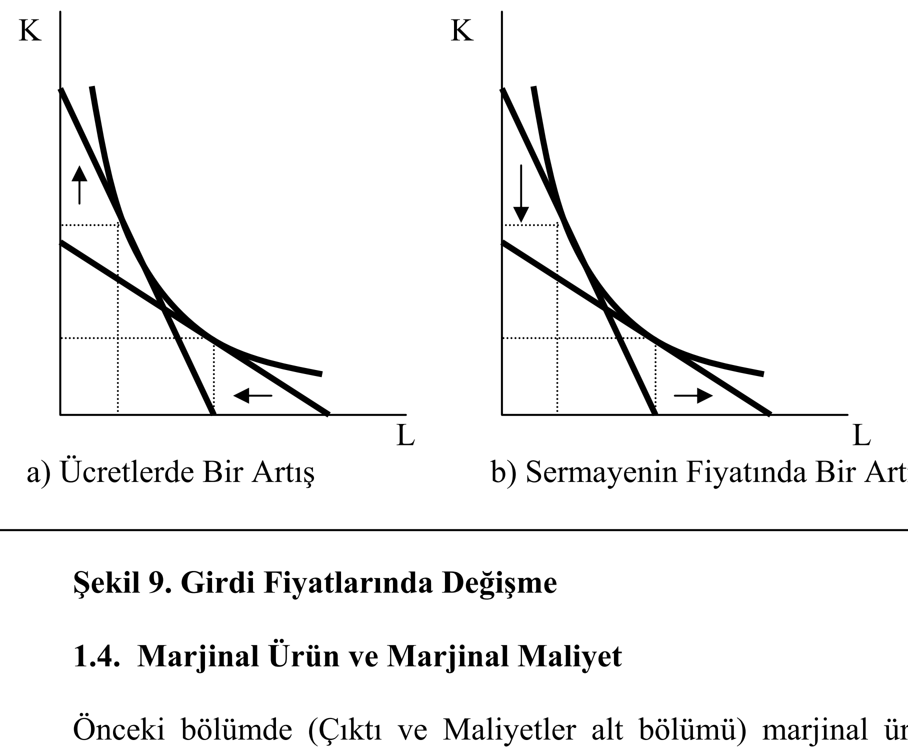
Şekil 8. En Düşük Maliyetli Üretim Tekniği

Bu nokta, eş ürün eğrisi ve eş maliyet doğrusunun birbirine teğet olduğu noktada gerçekleşmektedir. *b* noktasında en düşük maliyet tekniği veya ekonomik olarak etkin teknik gerçekleşmektedir. *b* noktasında marjinal ikame oranı girdi fiyatları oranına eşittir. Marjinal ikame oranı (eş ürün eğrisinin eğiminin büyüklüğü) = nispi girdi fiyatı (eş maliyet doğrusunun eğimi) dir.

1.3.l. Girdi Fiyatlarında Değişmeler

Girdi fiyatlarında değişmeler girdi ikamesine yol açmaktadır **(Şekil 9).**

İkamenin büyüklüğü teknolojiye bağlıdır. Eğer girdiler yakın ikamede ise eş ürün eğrileri düz doğrular olacak ve ikame büyük olacaktır. Yakın ikamede değilse eş ürün eğrileri nispeten daha dar alana sıkışmış olacak ve küçük ikame için oldukça büyük fiyat değişmeleri gerekecektir.



a) Ücretlerde Bir Artış

b) Sermayenin Fiyatında Bir Artış

Şekil 9. Girdi Fiyatlarında Değişme

1.4. Marjinal Ürün ve Marjinal Maliyet

Önceki bölümde (Çıktı ve Maliyetler alt bölümü) marjinal ürün (*MP*) arttığında, marjinal maliyetin (*MC*) düştüğünü, *MP* 'nin düştüğünde ise MC 'nin arttığını görmüştük. Şimdi aynı soruna eş maliyet, eş ürün ve en düşük maliyet tekniği ile yaklaşmak istiyoruz.

1.4.1. Marjinal İkame Oranı ve Marjinal Ürün

Sermaye yerine emeğin marjinal ikame oranı, emeğin marjinal ürünü / sermayenin marjinal ürünü oranına eşittir.

$$MRS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{Emeğin\ Marjinal\ Ürünü}{Sermayenin\ Marjinal\ Ürünü} \text{ dür.}$$

Çıktıda değişme = $MP_L \times \Delta L + MP_K \times \Delta K$ dir.

Çıktıda değişme emek girdisinin marjinal ürünü × emek girdi miktarında değişme + sermayenin marjinal ürünü × sermaye girdi miktarındaki değişmedir.

Aynı eş ürün eğrisi üzerinde kalmak istediğimize göre, çıktıdaki değişme sıfırdır. Böylece

$MP_L\ \Delta L = -\ MP_K\ \Delta K$ olur

veya

$MP_L\ \Delta L = MP_K\ -\Delta K$ yazabiliriz.

Böylece girdilerdeki değişmeyi görebiliriz.

Buradan

$$-\frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{MP_L}{MP_K} \text{ olur.}$$

$$-\frac{\Delta K}{\Delta L} = \text{Marjinal İkame Oranı idi.}$$

Buna göre aynı eş ürün eğrisinde kalmak üzere sermayede azalış, emekle artışla karşılanmaktadır. Özetle, *MRS* emek ve sermayenin marjinal ürünleri oranına eşittir.

1.4.2. Marjinal Maliyet

Eş ürün eğrisinin eğimi $\frac{MP_L}{MP_K}$ dir.

Eş maliyet doğrusunun eğimi $\frac{P_L}{P_K} = \frac{w}{r}$ dir.

P_L = Emeğin fiyatı (ücret oranı), P_K = Sermayenin fiyatı (faiz oranı)dır. En düşük maliyet tekniği gereği, eş ürün eğrisi ve eş maliyet doğrusunun birbirlerine teğet olduğu noktada;

$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{P_L}{P_K}$ dir. Buradan;

$\frac{MP_L}{P_L} = \frac{MP_K}{P_K}$ dir.

Buna göre emeğe harcanan her TL'nın marjinal ürünü, sermayeye harcanan her TL'nın değerine eşit olduğunda, toplam maliyet minimize edilmektedir.

$\frac{MP_L}{P_L} < \frac{MP_K}{P_K}$ ise, sermaye azaldığında, aynı çıktıyı elde etmek için, daha çok emek gerekecektir. $\frac{MP_L}{P_L} > \frac{MP_K}{P_K}$ ise, daha çok sermaye, maliyeti düşürmektedir. En düşük maliyet tekniği, ancak $\frac{MP_L}{P_L} = \frac{MP_K}{P_K}$ eşitliğinde gerçekleşmektedir.

2. Teknoloji ve Maliyete Matematiksel Yaklaşım

2.1. Üretim Fonksiyonu

$Q = f(L, K) = L^{1/2}K^{1/2}$ şeklinde Cobb–Douglas üretim fonksiyonu olsun.
MPP, marjinal fiziksel ürün (marjinal ürün) dür.

$MPP_L = \dfrac{\Delta f}{\Delta L} = 1/2\ L^{-1/2}K^{1/2}$ dir.

$\dfrac{\Delta MPP_L}{\Delta L} > 0$ ise artan marjinal getiri,

$\dfrac{\Delta MPP_L}{\Delta L} < 0$ ise azalan marjinal getiri,

$\dfrac{\Delta MPP_L}{\Delta L} = 0$ ise sabit marjinal getiri vardır.

$$MRTS = \frac{MPP_L}{MPP_K} = \frac{1/2L^{-1/2}K^{1/2}}{1/2L^{1/2}K^{-1/2}} = \frac{K}{L} \text{ dir.}$$

2.2.Uzun Dönemde Maliyet Minimizasyonu

$Q = L^{1/2}K^{1/2}$ olsun.
$wL + rK$ = Faktör harcamalarıdır.

$MRTS = \dfrac{w}{r}$,

$MRTS = \dfrac{K}{L}$ dir.

Buradan,

$\frac{K}{L} = \frac{w}{r}$,

$K = \frac{wL}{r}$ dir.

$Q = L^{1/2}K^{1/2}$ idi.

Buradan,

$Q = L^{1/2}K(Lw/r)^{1/2}$ olur.

L çekilirse,

$L = w^{-1/2}r^{1/2}Q$ dır.

Bu değer, maliyeti minimize eden emek miktarıdır.

$K = \frac{wL}{r}$ idi. Buradan maliyeti minimize eden sermaye miktarı,

$K = w^{1/2}r^{-1/2}Q$ olur.

Birleştirisek,

$C(Q) = w(w^{-1/2}r^{1/2}Q) + r(w^{1/2}r^{-1/2}Q) = 2w^{1/2}r^{1/2}Q$ dır.

Bu eşitlik maliyeti minimize eden emek ve sermaye bileşimini vermektedir.

2.3. Üretim Faktörünün İkiden Fazla Olması Durumu

E= Elektrik olsun.

Q= f(L, K, E) dir.

$MPP_E = \frac{\partial f}{\partial E}$,

$MRTS = \dfrac{MPP_K}{MPP_E}$ dir.

2.4. Lagrange Yönremi ve Uzun Dönem Maliyet Minimizasyonu

Toplam harcamalar = $wL + rK + tE$,

$Q = f(L, K, E) = L^{1/3}K^{1/3}E^{1/3}$ olsun.

$V = wL + rK + tE + \lambda(Q - L^{1/3}K^{1/3}E^{1/3})$ dir.

λ= Lagrange çarpanıdır. Kısmi türevlerini alırsak,

$$\frac{\partial V}{\partial L} = w - \lambda MPP_L = w - 1/3\lambda L^{-2/3}K^{1/3}E^{1/3} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = r - \lambda MPP_K = r - 1/3\lambda L^{1/3}K^{-2/3}E^{1/3} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial E} = t - \lambda MPP_E = t - 1/3\lambda L^{1/3}K^{1/3}E^{-2/3} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = Q - f(L, K, E) = Q - L^{1/3}K^{1/3}E^{1/3} = 0 \text{ dır.}$$

Buradan,

$L = w^{-2/3}r^{1/3}t^{1/3}Q$,

$K = w^{1/3}r^{-2/3}t^{1/3}Q$,

$E = w^{1/3}r^{1/3}t^{-2/3}Q$ ve

$\lambda = 3w^{1/3}r^{1/3}t^{1/3}$ dir.

Toplam maliyet, $wL + rK + tE = 3w^{1/3}r^{1/3}t^{1/3}Q$ dır.

3. Firma Tercihleri

3.1. Firma Tercihleri

Bir firmanın üretim fonksiyonunu *Q=f(K,L)*; olarak sermaye (*K*) ve emekten (*L*) oluştuğunu varsayalım. Böylece, sermayenin marjinal fiziksel ürünü,

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = f_K \qquad (1),$$

ve emeğin marjinal fiziksel ürünü,

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = f_L \qquad (2)$$ olacaktır.

3.1.1. Azalan Marjinal Verimlilik

Girdilerin marjinal fiziksel ürünlerindeki azalmayı matematiksel olarak göstermek için, (1) ve (2)'nin türevlerini alırız. Buna göre,

$$\frac{\partial MP_K}{\partial K} = \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = f_{KK} < 0 \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial MP_L}{\partial L} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = f_{LL} < 0$$ yazılır.

3.1.2. Örnek

$Q=f(K,L)=600K^2L^2 - K^3L^3$ olduğunu varsayalım. Bu fonksiyona göre, toplam, marjinal ve ortalama emek verimliliğini bulalım. Bu durumda sermaye miktarını bilmemiz gerekmektedir. Sermayeyi 10 olarak kabul edersek, toplam verimlilik,

$Q=TP_L=60000L^2-1000L^3$ (3) olacaktır. Emeğin marjinal verimliliği ise,

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 120000L - 3000L^2 \qquad (4)$$ bulunur.

Maksimum çıktı için, eşitlik (4)'ü sıfıra eşitleriz. Böylece, maksimum çıktıyı sağlayacak olan emek sayısının 40 olduğu bulunacaktır. L=40'ı üretim fonksiyonunda (3)'de yerine koyarsak, Q=32000000 elde edilir.

Emeğin ortalama verimliliğini, aşağıdaki gibi hesaplarız.

$AP_L = \frac{TP_L}{L} = 60000L - 1000L^2$ bulunur. Maksimum ortalama verimlilik için, $\frac{\partial AP_L}{\partial L} = 0$' dan hareketle, L=30 bulunur. Bunu ortalama verimlilik fonksiyonunda yerine koyarsak, maksimum ortalama verimlilik 900000 olacaktır.

3.1.3. Ölçek Getirisi

Ölçeğe göre sabit getiriyi matematiksel olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$f(mK,mL)=mf(K,L)=mQ$ (5) dir.

Aynı şekilde, ölçeğe göre azalan getiride ,

$f(mK,mL)<mf(K,L)=mQ$ (6) olacaktır.

Ölçeğe göre artan getiride ise,

$f(mK,mL)>mf(K,L)=mQ$ (7) dir.

3.1.4. Marjinal İkame Oranı (MRS)

Marjinal ikame oranı (Marjinal Teknik İkame Oranı),

$MRS = -\frac{dK}{dL}\Big|_{Q=Q_0}$ (8)'dir.

Ayrıca, çıktıdaki değişimi, yazarsak, MRS'yi daha farklı bir biçimde ifade ederiz.

$$dQ = \frac{\partial f}{\partial L}dL + \frac{\partial f}{\partial K}dK = MP_L.dL + MP_K.dK = 0 \Rightarrow$$

$$MP_L.dL = -MP_K.dK$$

buradan,

$$-\frac{dK}{dL} = \frac{MP_L}{MP_K} \qquad (9) \qquad \text{olacaktır.}$$

3.1.5. İkame Esnekliği (σ)

İkame esnekliği (σ),

$$\sigma = \frac{dK/L}{dMRS}\frac{MRS}{K/L} \qquad (10)\text{'dur.}$$

MRS teknik ikame oranıdır.

3.1.6. İktisatta Sık Kullanılan Üretim Fonksiyonları

a) Doğrusal (lineer) Fonksiyonlar ($\sigma = \infty$)

Q=f(K,L)=aK+bL

b) Sabit Fonksiyonlar, (σ =0)

Q=min (aK, bL) a, b > 0,

c) Cobb–Douglas Tipi (σ =1)

$Q=f(K,L)=AK^aL^b$ a, b, A > 0 (sabit)

$$f(mK, mL) = A(mK)^a (mL)^b = Am^{a+b} K^a L^b = m^{a+b} f(K, L) \quad (11)$$

olur.

$a + b = 1 \Rightarrow$ sabit getirili ölçek
$a + b > 1 \Rightarrow$ artan getirili ölçek
$a + b < 1 \Rightarrow$ azalan getirli ölçek olacaktır.

3.2. Maliyet

3.2.1. Kãr ve Maliyet

Matematiksel olarak, kãrı gösterirsek,

Kãr = Toplam Hasılat – Toplam Maliyet

$\pi = PQ - wL - vK$ (12) olacaktır.

$\pi = Pf(K,L) - wL - vK$

Burada, *w* emek için, *v* ise sermaye için ödenen ücrettir.

Maliyet minimizasyonu olarak Lagrange çarpan yöntemini kullanırsak,

$$V = wL + vK + \lambda\left[Q_0 - f(K, L)\right] \quad (13)$$ olur.

$$\frac{\partial V}{\partial L} = w - \lambda \frac{\partial f}{\partial L} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = v - \lambda \frac{\partial f}{\partial K} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = Q_0 - f(K, L) = 0 \quad (16)$$

Eşitlik (14) ve (15)'den hareketle,

$$\frac{w}{v}=\frac{\partial f/\partial L}{\partial f/\partial K}=MRS \quad (K \text{ için } L) \qquad (17) \quad \text{bulunur.}$$

3.1.2. Örnek

Saat başı hamburger üretimi (Q) ızgara sayısına (K) ve işçiye (L) bağlıdır. Cobb–Douglas tipi üretim fonksiyonumuzun olduğunu varsayalım. $Q=10K^{1/2}L^{1/2}=10\sqrt{KL}$ 'dır. Izgaralar saat başına v kadar kiralanıyorsa ve işçilere saat başına w kadar ücret ödeniyorsa, toplam maliyet $TC=vK+wL$ olacaktır. Varsayalım ki, saat başı 40 hamburger için, maliyet minimizasyonu yaparsak, Lagrange fonksiyonu,

$$V=vK+wL+\lambda(40-10K^{1/2}L^{1/2}) \qquad \text{olur.}$$

Minimum için, birinci dereceden koşullar,

$$\frac{\partial V}{\partial L}=w-\lambda 5(K/L)^{1/2}=0 \qquad (18)$$

$$\frac{\partial V}{\partial K}=v-\lambda 5(L/K)^{1/2}=0 \qquad (19)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda}=40-10K^{1/2}L^{1/2}=0 \qquad (20) \qquad \text{dir.}$$

(18)'i (19)'a bölersek,

$$\frac{v}{w}=\frac{L}{K} \qquad (21) \quad \text{bulunur.}$$

Varsayalım ki, $w=v=K=4$ birim olsun. Böylece, $L=4$ bulunacaktır. Bu değerleri toplam maliyet fonksiyonunda yerine koyarsak, $TC=40$ olur.

3.1.3. Homojenlik

$TC = vK + wL$

$TC' = tvK + twL = t(vK + wL) = tTC$ ise, böylece,

$tTC = TC'$ (22) olacaktır.

3.1.4. Örnek

Hamburger örneğine geri döndüğümüzde,

$\frac{v}{w} = \frac{L}{K}$ 'den hareket ederek, $Q = 10K^{1/2}L^{1/2}$ gereken işlemleri yaparsak, çıktıyı önce sermayeye (K) bölersek,

$$\frac{Q}{K} = 10\left(\frac{L}{K}\right)^{1/2} = 10\left(\frac{v}{w}\right)^{1/2} \qquad (23)\text{'den,}$$

$$K = \frac{Q}{10} w^{1/2} v^{-1/2} \qquad (24) \text{ olup,}$$

$$vK = \frac{Q}{10} w^{1/2} v^{1/2} \qquad (25) \text{ olacaktır.}$$

Aynı işlemleri, emekle yaptığımızda,

$$wL = \frac{Q}{10} w^{1/2} v^{1/2} \qquad (26) \text{ bulunur.}$$

(25) ve (26)'daki ifadeleri, toplam maliyet fonksiyonunda, $TC = vK + wL$ 'de yerine koyarsak,

$$TC = \frac{Q}{5} w^{1/2} v^{1/2} \qquad (27) \text{ yazılır.}$$

Eğer, $w=v=4$ birim ise,

$$TC=\frac{4Q}{5}=0.8Q \qquad (28) \quad \text{bulunur.}$$

Saat başı 40 hamburger üretmenin maliyeti, Q'yu eşitlik (28)'de yerine koyarsak, TC=32 çıkacaktır. Ölçek göre sabit getiri olduğundan, AC=0.8 ve MC=0.8 olur.

3.1.5. Kısa–Uzun Dönem Ayrımı

Bildiğimiz gibi, kısa dönemde sermayeyi (K_1) değiştiremediğimizden, sabit kabul ederiz. Böylece, üretim fonksiyonumuz,

$$Q=f(K_1, L) \qquad (29) \quad \text{olacaktır.}$$

Kısa dönem toplam maliyet (*SRTC*) ise,

$$SRTC=vK_1 + wL \qquad (30) \quad \text{olur.}$$

Kısa dönem sabit maliyet (*SRFC*) ise,

$$SRFC(K_1)=vK_1 \qquad (31) \quad \text{bulunur.}$$

Kısa dönem değişken maliyet (*SRVC*) ise,

$$SRVC=wL \qquad (32) \quad \text{olacaktır.}$$

Bir başka şekilde, kısa dönem toplam maliyet fonkisyonunu yazarsak,

$$SRTC=SRFC(K_1) + SRVC \qquad (33) \quad \text{olur.}$$

Kısa dönem ortalama toplam maliyet ise,

$SRATC = \dfrac{SRTC(K_1)}{Q}$ (34) bulunur.

Kısa dönem marjinal maliyet ise,

$SRMC = \dfrac{\partial SRTC(K_1)}{\partial Q}$ (35) olacaktır.

3.1.6. Örnek

Hamburger örneğimizden hareket edersek, kısa dönem üretim fonksiyonu,

$Q = 10K_1^{1/2} L^{1/2}$ (36) olacaktır. Buradan,

$L = \dfrac{Q^2}{100K_1}$ (37) bulunur.

(37)'yi kısa dönem toplam maliyet fonksiyonunda yerine koyarsak,

$SRTC = vK_1 + wL = vK_1 + \dfrac{Q^2}{100K_1}$ (38) olur.

Sermayenin yani 4 ızgaranın olduğunu kabul edersek,

$SRTC = 4v + \dfrac{wQ^2}{400}$ (39) olacaktır.

Ödenen ücretler de $v = w = 4$ birim ise uzun dönem toplam maliyet fonksiyonu,

$TC = 4K + \dfrac{Q^2}{100K}$ (40) bulunur.

3.1.7. Örnek

Bir lahmacun dükkanının kısa dönem toplam maliyet fonksiyonu,

$SRTC = 4v + \frac{wQ^2}{400}$ olsun.

Kısa dönem marjinal maliyet fonksiyonu ise,

$SRMC = \frac{\partial SRTC(K_1)}{\partial Q} = \frac{2wQ}{400}$ olur.

Tam rekabette, fiyat marjinal maliyete eşit olacağından,

$P = SRMC = \frac{2wQ}{400}$ (41) olacaktır.

Q için, (41)'i çözersek,

$Q = \frac{200P}{w}$ (42) bulunur.

Emeğe ödenen ücret 4 birim kabul edilirse,

$Q = 50P$ (43) olur.

Bu semtte 100 tane lahmacuncu varsa, tam rekabet olduğundan, her firma için,

$Q_i = 50P \quad i = (1, \ldots\ldots, 100)$ olacaktır.

Böylece, piyasa arz fonksiyonu,

$Q_s = \sum_{i=1}^{100} Q_i = 100 * (50P) = 5000P$ (44) bulunur.

Bir saatte piyasanın lahmacun talebi,

Q_D=10000 – 5000P (45) olsun.

Denge fiyatını bulmak için, Q_D=Q_S olması gerekmektedir. Böylece,

10000 – 5000P = 5000P yazılır. Buradan, P=1 ve Q_D=Q_S=5000 olur.

Eğer, emeğin ücreti bir birim artarak, 5 birim olursa (42) ve (44) arasındaki işlemler sayesinde,

Q_S = 4000P (46) elde edilir.

Piyasa talebiyle, arzını eşitlediğimizde,

P=1,11 ve Q_D = Q_S = 4000 bulunur.