17.2 METRİK

METRİK UZAY KAVRAMI

Normlanmış bir uzay, herşeyden önce bir vektör uzayıdır, yani $(X, \|\|)$ normlanmış bir uzay ise, X kümesi üzerinde bir vektör uzayı yapısı vardır. Oysa, bu kesimde tanımlayacağımız metrik uzay kavramı için X kümesinin, aşağıda söyleyeceğimiz metrik aksiyomlarından başka bir özelliğe ya da yapıya sahip olması gerekmez.

Bir metrik uzay, öğeleri arasındaki yakınlık belirlenmiş bir kümedir. Başka bir deyişle, üzerinde bir uzaklık fonksiyonu tanımlanmış bir kümedir. Gerçekten, adına metrik diyeceğimiz bu kavram, herkesin sezgisel olarak bildiği uzaklık kavramının genellemesinden başka birşey değildir.

Tanım 17.2.1. Bir X kümesi ile bir $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Aşağıdaki aksiyomları sıralıyalım:

Her $x, y, z \in X$ için

[M1] $\rho(x, y) \geq 0$

[M2] $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

[M3] $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simetrik)

[M4] $x = y \Rightarrow \rho(x, y) = 0 \quad (\text{yani}\, \rho(x, x) = 0)$

[M5] $x \neq y \Rightarrow \rho(x, y) \neq 0$

Bu aksiyomlardan

[$M1$] ve [M2] özelikleri sağlanıyorsa ρ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *yarı metriksi (quasi-semi-metric)*,

[$M1$], [M2] ve [M3] özelikleri sağlanıyorsa ρ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *yarı metrik (semi-metric)*,

[$M1$], [M2] ve [M4] özelikleri sağlanıyorsa ρ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *sözde metriksi (quasi-pseudometric)*,

[$M1$], [M2] , [M3] ve [M4] özelikleri sağlanıyorsa ρ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *sözde metrik (pseudometric)*,

[M1], [M2] , [M3] , [M4] ve [M5] özelikleri sağlanıyorsa ρ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *metrik (metric),*

denilir.

Hemen belirtelim ki bu aksiyomlar birbirlerinden bağımsız değildir. Örneğin [M4],[M2] ve [M3] aksiyomları sırasıyla kullanlırsa

$$0 = \rho(x,x) \leq \rho(x,y) + \rho(y,x) = 2\rho(x,y)$$

çıkar, ki bu, [M1] aksiyomunu verir.

Üzerinde bir metrik tanımlanmış bir kümeye bir *metrik uzay* diyeceğiz. Eğer ρ fonksiyonu, X kümesi üzerinde bir metrik ise, bu metrik uzayı (X,ρ) ile göstereceğiz.

Yarı-metrik uzay ve *metrikimsi uzay* kavramları da benzer olarak tanımlanır.

(X,ρ) bir metrik uzay ve $x,y \in X$ ise, negatif olmayan $\rho(x,y)$ gerçel sayısına x ile y öğeleri arasındaki *uzaklık* diyeceğiz.

Örnek 17.2.1. Boş olmayan her hangi bir X kümesi verilsin. $X \times X$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

dönüşümü bir metriktir.

Örnek 17.2.2. $|\quad|$ simgesi gerçel eksende salt değer fonksiyonunu göstermek üzere, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan

$$\mu(x,y) = |x - y|, \quad (x,y \in \mathbb{R}) \tag{17.26}$$

fonksiyonu bir metriktir. Adına, gerçel eksen üzerindeki *salt değer metriği* ya da kısaca *salt metrik*, diyeceğimiz bu metrik, iki gerçel sayı arasındaki uzaklığı vermektedir. μ nun metrik aksiyomlarını sağladığı kolayca görülür.

Örnek 17.2.3. $|\quad|$ simgesi karmaşık düzlemde salt değer fonksiyonunu göstermek üzere, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan

$$\kappa(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|, \quad (z_1,z_2 \in \mathbb{C}) \tag{17.27}$$

fonksiyonu bir metriktir. Adına, karmaşık düzlem üzerindeki *salt değer metriği* ya da, kısaca *salt metrik* diyeceğimiz bu metrik, iki karmaşık sayı arasındaki uzaklığı vermektedir. κ nın metrik aksiyomlarını sağladığı kolayca görülür.

Önerme 17.2.1. *$x = (x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R}^n)$ $(n \geq 1)$ olmak üzere $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan*

$$\mathfrak{p} : (x, y) \to \mathfrak{p}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \tag{17.28}$$

dönüşümü $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metriktir.

İSPAT: [M1] ile [M2] aksiyomlarının sağlandığı apaçıktır. [M3] aksiyomu

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| &= \sum_{i=1}^{n} |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| \end{aligned}$$

eşitsizliğinden çıkar. Son olarak, [M4] ve [M5] aksiyomları

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 &\Leftrightarrow x_i = y_i \quad (1 \leq i \leq n) \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

bağıntısından çıkar.

Önerme 17.2.2. *$x = (x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R}^n)$ $(n \geq 1)$ olmak üzere $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan*

$$\mathfrak{m} : (x, y) \to \mathfrak{m}(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} \tag{17.29}$$

dönüşümü $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metriktir.

İSPAT: [M1] ile [M2] aksiyomlarının sağlandığı apaçıktır. [M3] aksiyomu

$$\begin{aligned} \max |x_i - y_i| &\leq \max\{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|\} \quad (1 \leq i \leq n) \\ &\leq max\, |x_i - z_i| + \max |z_i - y_i| \end{aligned}$$

eşitsizliğinden çıkar. Son olarak, [M4] ve [M5] aksiyomları

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \max |x_i - y_i| = 0 \quad (1 \leq i \leq n) \\ &\Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

bağıntısından çıkar.

Önerme 17.2.3. $\mathbb{R}^n$ *ya da* $\mathbb{C}^n (n \geq 1)$ *vektör uzayları üzerinde*

$$\mathfrak{s}_n(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{17.30}$$

diye tanımlanan dönüşüm bir metriktir. Buna Öklit metriği *diyeceğiz.*

İSPAT: [M1], [M2], [M4] ve [M5] aksiyomlarının sağlandığı apaçıktır. [M3] aksiyomunun sağlandığını görmek için, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yerine

$$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$$

koyarak *Minkowski* eşitsizliğini uygulamak yetecektir.

$n = 1$ için $\mathfrak{s}_n$ metriğinin μ salt metriğine indirgendiği açıktır.

Önerme 17.2.4. (X, ρ) *bir metrikimsi uzay ise, her* $x, y, z \in X$ *için*

$$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y) \tag{17.31}$$

olur.

İSPAT: [M2] ve [M3] den

$$\rho(x, z) \leq \rho(y, z) + \rho(x, y)$$

ve

$$\rho(y, z) \leq \rho(y, x) + \rho(x, z) = \rho(x, y) + \rho(x, z)$$

yazılabilir. Buradan

$$-\rho(x, y) \leq \rho(x, z) - \rho(y, z) \leq \rho(x, y)$$

çıkar. Bu, isteneni verir.

Önerme 17.2.5. (X, ρ) *bir metrikimsi uzay ise, her* $x, y \in X$ *için*

$$\mathfrak{q} : (x, y) \to \mathfrak{q}(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\} \tag{17.32}$$

diye tanımlanan dönüşüm de X *üzerinde bir* metrikimsi *olur.*

İSPAT: [M1], [M2] ve [M4] aksiyomlarının sağlandığı apaçıktır. [M3] aksiyomunun sağlandığı ise

$$\min\{1, \rho(x,y)\} \leq \min\{1, \rho(x,z) + \rho(z,y)\}$$

$$\leq \min\{1, \rho(x,z)\} + \min\{1, \rho(z,y)\}$$

eşitsizliğinden çıkar. Şimdi bu eşitsizliğin varlığını gösterelim. İki hal vardır. Eğer $\rho(x,z)+\rho(z,y) \geq 1$ ise sol yan 1'den büyük olmayacağına göre, eşitsizlik vardır. Eğer $\rho(x,z) + \rho(z,y) < 1$ ise, istenen şey $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ den çıkar.

Demek ki $\mathfrak{q}$ dönüşümü X üzerinde bir metrikimsidir.

Önerme 17.2.6. *Metrikimsilerden oluşan her hangi bir ailenin toplamı da bir metrikimsidir. Özel olarak, sonlu tane metriğin toplamı da bir metriktir.*

İSPAT: X üzerinde tanımlı bir $\{\eta_i : i \in I\}$ metrikimsiler ailesi verilsin. Bu durumda $\eta = \sum_{i \in I} \eta_i$ toplamının da X üzerinde bir metrikimsi olduğunu göstereceğiz. Gerçekten, her $x, y \in X$ için

$$(x,y) \to \eta(x,y) = \sum_{i \in I} \eta_i(x,y) \tag{17.33}$$

diye tanımlanan fonksiyonun [M1]-[M4] aksiyomlarını sağlayacağını görmek için, her $i \in I$ için η_i nin bu aksiyomları sağladığını düşünmek yetecektir.

Özel olarak I indis kümesi sonlu ve η_i ler birer metrik ise toplamlarının sonlu kalacağı ve [M5] aksiyomunun da sağlanacağı apaçıktır.

Önerme 17.2.7. *Metrikimsilerden oluşan her hangi bir ailenin* en küçük üst sınırı (sup) *da bir metrikimsidir. Özel olarak, sonlu tane metriğin* maksimumu *da bir metriktir.*

İSPAT: X üzerinde tanımlı bir $\{\eta_i : i \in I\}$ *metrikimsiler* ailesi verilsin. Bu durumda

$$\chi = \sup\{\eta_i : i \in I\}$$

dönüşümünün de X üzerinde bir metrikimsi olduğunu göstereceğiz. χ nin tanımı uyarınca, her $x, y \in X$ için

$$\chi : (x,y) \to \chi(x,y) = \sup\{\eta_i(x,y) : i \in I\} \tag{17.34}$$

olur. χ nin dönüşümünün [M1]-[M4] aksiyomlarını sağlayacağını görmek için, yine her $i \in I$ için η_i nin bu aksiyomları sağladığını düşünmek yetecektir.

Özel olarak, I sonlu ve η_i ler birer metrik ise, bunların en küçük üst sınırı

$$(x, y) \to \chi(x, y) = \max\{\eta_i(x, y) : i \in I,\ I \text{ sonlu}\} \tag{17.35}$$

maksimumuna eşittir. Çünkü sonlu sayıda $\eta_i(x, y)$ gerçel sayı kümesinin sup değeri max değerine eşittir. Dolayısıyla, χ nin [M5] aksiyomunu sağlayacağı hemen görülür.

Önerme 17.2.8. *Her hangi bir X kümesi ile her hangi bir (E, η) metrikimsi uzayı verilsin ve bir $f : X \to E$ fonksiyonu tanımlanmış olsun. Bu durumda, her $x, y \in X$ için*

$$\vartheta : (x, y) \to \vartheta(x, y) = \eta(f(x), f(y)) \tag{17.36}$$

diye tanımlanan ϑ dönüşümü X üzerinde bir metrikimsi olur.

İSPAT: Bunun [M1]-[M4] aksiyomlarını sağlayacağı kolayca görülebilir. Ancak η bir metrik olsa bile, ϑ bir metrik olmayabilir. Bunu aşağıdaki örnekten görebiliriz.

Örnek 17.2.4. Bir X kümesi ile her hangi bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

$$\vartheta : (x, y) \to \vartheta(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

dönüşümü X üzerinde bir *metrikimsidir*, ama bir metrik olmayabilir. Gerçekten f bire-bir değilse ϑ nın [M5] aksiyomunu sağlamayacağı apaçıktır.

Şimdi de, bu dönüşümün metrik olduğu duruma bir örnek verelim.

Örnek 17.2.5.

$$\nu(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right| \tag{17.37}$$

diye tanımlanan ν fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir.

Gerçekten ν nün metrikimsi olduğu yukarıdaki örnekten bellidir.

$$x \to \frac{x}{(1 + |x|)}$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}$ den $(-1, +1)$ üzerine sürekli ve bire-bir olduğunu biliyoruz. Öyleyse [M5] aksiyomu da sağlanacaktır.

Önerme 17.2.9. $(X, \|\|)$ *normlanmış bir uzay ise her* $x, y \in X$ *için*

$$\rho : (x, y) \to \rho(x, y) = \|x - y\| \tag{17.38}$$

diye tanımlanan ρ *dönüşümü* X *kümesi üzerinde bir metrik olur.*

İSPAT: Norm fonksiyonu negatif değer almadığından, (17.38) ile tanımlanan ρ dönüşümü [M1] aksiyomunu sağlar. [M2] aksiyomu, α yerine -1 konulursa [N2] den çıkar. [M3] aksiyomu

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|x - z + z - y\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= d(x, z) + d(z, y)\end{aligned}$$

den görülür. [M4] ve [M5] aksiyomları ise

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

den çıkar.

Uyarı 17.2.1. Yukarıda tanımlanmış olan $\mathfrak{s}, \mathfrak{p}, \mathfrak{m}$ ve $\mathfrak{s}_n$ metriklerinin ilgili Öklid normlarından elde edilebildiğini görünüz.

Örnek 17.2.6. $C[a, b]$ kümesine ait her f, g için

$$(f, g) \to \rho(f, g) = \|f - g\|_1 = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \tag{17.39}$$

diye tanımlanan ρ dönüşümü bir metriktir.

Örnek 17.2.7. (17.24) ile tanımlanan $\mathfrak{B}(X)$ kümesine ait her f, g için

$$(f, g) \to \rho(f, g) = \|f - g\|_\infty \tag{17.40}$$

$$= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \tag{17.41}$$

diye tanımlanan ρ dönüşümü bir metriktir. Neden?

Önerme 17.2.10. *Metrikimsi uzaylardan oluşan bir* $\{(X_n, \eta_n) : n \in \mathbb{N}\}$ *ailesi verilsin.* $X = \Pi_{n \in \mathbb{N}} X_n$ *kartezyen çarpımını tanımlayalım. Her* n *için* $x_n, y_n \in X_n$ *olmak üzere, her* $x = (x_n), y = (y_n) \in X$

$$\rho : (x, y) \to \rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \eta_n(x_n, y_n) \tag{17.42}$$

dönüşümü X *üzerinde bir* metrikimsidir.

Bunun ispatı kolayca yapabilecektir.

17.2.1 Problemler

1. Bu kesimde ispatı yapılmayan örnekleri ispatlayınız.

2. $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ öğeleri $\mathbb{R}^2$ kümesinden alınmak üzere, aşağıdakilerden hangileri $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir metrik değildir?

$$\rho(x,y) = min\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$
$$\delta(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$
$$\psi(x,y) = |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|$$

3. Sonlu sayıda (X_i, η_i), $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, metrik uzayları veriliyor.

$$X = \Pi_{i=1}^n X_i$$

olsun ve $x, y \in X$ ise $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ olmak üzere,

$$\alpha(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n [\eta_i(x_i, y_i)]^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\beta(x,y) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x_i, y_i)$$
$$\gamma(x,y) = \max\{\eta_i(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq n\}$$

fonksiyonları tanımlanıyor. Bunlar X üzerinde birer metrik midir?

4. $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

fonksiyonunun bir metrik olduğunu gösteriniz. Buna, karmaşık sayılar üzerindeki *salt değer metriği* diyeceğiz.

5. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\delta(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1 + \rho(x,y)}$$

diye tanımlanan δ fonksiyonunun da X üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.

6. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. $X \times X$ den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri X üzerinde bir metriktir?

$$\begin{aligned}
\delta(x,y) &= k\rho(x,y), \quad (k \in \mathbb{R}^+) \\
\gamma(x,y) &= k\rho(x,y), \quad (k \in \mathbb{R}) \\
\mu(x,y) &= [\rho(x,y)]^n, \quad (n \in \mathbb{N}) \\
\nu(x,y) &= [\rho(x,y)]^r, \quad (0 < r < 1)
\end{aligned}$$

7. X kümesine ait sabit bir a noktası seçelim. Her $f, g \in \mathbb{C}^X$ için

$$\rho : (f,g) \to \rho(f,g) = |f(a) - g(a)|$$

diye tanımlanan ρ dönüşümü $\mathbb{C}^x$ üzerinde bir metrikimsidir. Neden?

8. Bütün karmaşık dizilerin oluşturduğu kümeye $\mathfrak{C}$ diyelim; yani

$$\mathfrak{C} = \{x | x = (x_n), x_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

olsun. Gösteriniz ki

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \tag{17.43}$$

diye tanımlanan ρ fonksiyonu $\mathfrak{C}$ kümesi üzerinde bir metriktir.

9. Bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sınırlı değişimli bütün fonksiyonların oluşturduğu kümeyi $\mathfrak{B}[a, b]$ ile göstereceğiz. Bunun bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Her f fonksiyonunun tam değişimini $\delta(f)$ ile temsil edersek, $f \to \delta(f)$ dönüşümünün bu uzay üzerinde bir yarı norm olduğu, ama bir norm olmadığı kolayca görülebilir. Dolayısıyla,

$$(f,g) \to \rho(f,g) = \delta(f-g)$$

dönüşümü bu uzay üzerinde bir metrikimsi olur. Gösteriniz.