# Kümeler Kuramı

Math 111
Resit
Eylül 1999
Ali Nesin

Her zaman cevabınızı kanıtlayın. "Evet" veya "hayır" gibi cevaplar kabul edilmeyecektir.

**1.** $A$, $(X, <)$ sıralı kümesinin bir altkümesi olsun. Eğer $X$'in her $x < y$ elemanları için, $x < a < y$ özelllliğini sağlayan bir $a \in A$ varsa $A$'ya $X$'te **yoğun** denir, $A = \{q^2 : q \in \mathbb{Q}\}$ olsun. $A$ kümesi $\mathbb{Q}$ kümesinde yoğun mudur? (5 pts.)

**2.** $X$ ve $Y$ iki küme olsun ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $A_i \subseteq X$ ve $B_j \subseteq Y$ olsun.

**2a.** $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ olduğunu gösterin. (4 pts.)

**2b.** $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ olduğunu gösterin. (2 pts.)

**2c.** $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ olduğunu gösterin. (4 pts.)

**2d.** $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ olduğunu gösterin. (4 pts.)

**2e.** #2b'deki ilişkinin tersi doğru mudur? Kanıtlayın ya da karşı örnek verin (4 pts.)

**3.** $\bigcap_{i=1}^{n} f^i(\mathrm{R}) \neq \varnothing$ but $\bigcap_{i\in\mathbf{N}} f^i(\mathbf{R}) = \varnothing$ özelliğini sağlayan bir $f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bulun. (8 pts.)

**4.** $X$, $\mathbb{R}$'nin boş olmayan bir altkümesi olsun. Her $x$, $y \in X$ için $x - y \in X$ olsun.

**4a.** $0 \in X$ olduğunu gösterin. (1 pt.)

**4b.** $x \in X$ için, $-x \in X$ olduğunu gösterin (1 pts.)

**4c.** $x, y \in X$ için $x + y \in X$ olduğunu gösterin. (2 pts.)

Bundan böyle ayrıca eğer $x \in X$ ise $x^2 \in X$ olsun.

**4d.** $x, y \in X$ için, $2xy \in X$ olduğunu gösterin. (3 pts.)

**4e.** $2X$ kümesinin $+$, $-$ ve $\times$ altında kapalı olduğunu gösterin. (4 pts.)

**4f.** $x \equiv y$ ancak ve ancak $x - y \in 2X$ ilişkisinin $X$'in bir denklik ilişkisi olduğunu gösterin. (4 pts.)

**5.** Eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ altkümesi, her $x \in X$ için, $x^2 \in X$ oluyorsa $X$'e kare-kapalı diyeceğiz. $\varnothing$ ve $\mathbb{R}$'nin kare-kapalı olduğunu gösterin.

**5a.** Eğer $\Pi$, elemanları kare-kapalı atkümelerden oluşan bir kümeyse, o zaman $\cup\Pi$ ve $\cap\Pi$ kümelerinin de kare-kapalı olduklarını kanıtlayın. (4 pts.)

**5b.** $A \subseteq \mathbb{R}$ herhangi bir altküme olsun. $A$'yı içeren en küçük kare-kapalı bir kümenin varlığını kanıtlayın. Bu kümeyi $A^*$ olarak gösterelim. (4 pts.)

**5c.** $A$ $\mathbb{R}$'nin herhangi bir altkümesi olsun. $A$ nın en büyük kare-kapalı altkümesinin varlığını kanıtlayın. Bu kümeyi $A^\circ$ olarak gösterelim. (4 pts.)

**5d.** Doğru veya yanlışlığını kanıtlayın: $A$ ve $B$, $\mathbb{R}$ nin herhangi iki altkümesi olsun,

$$A^* \cup B^* = (A \cup B)^*$$
$$A^* \cap B^* = (A \cap B)^*$$
$$A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$$
$$A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$$

(12 pts.)

**6. [Cantor-Schröder-Bernstein]** $A$ bir küme ve $A'$, $A$'nın bir altkümesi olsun. $A$ ve $A'$ arasında birebir ve örten bir $f\colon A \to A'$ fonksiyonu olduğunu varsayalım. $B$ kümesi, $A' \subseteq B \subseteq A$ özelliğini sağlayan herhangi bir küme olsun. Bu sorunun amacı $B$ ile $A$ arasında bir birebir ve örten fonksiyon olduğunu göstermek.

$Q = B \setminus A'$ olsun.

$\Gamma = \{X \subseteq A : Q \cup f(X) \subseteq X\}$ olsun.

$T = \cap\,\Gamma = \bigcap_{X\in\Gamma} X$ olsun.

**6a**. $T \in \Gamma$ olduğunu gösterin. (4 pts.)

**6b.** $Q \cup f(T) \in \Gamma$ olduğunu gösterin. (4 pts.)

**6c.** $T = Q \cup f(T)$ olduğunu gösterin. (İpucu: a ve b'yi kullanın). (5 pts.)

**6d.** $B = T \cup (A' \setminus f(T))$ olduğunu gösterin. (İpucu: c'yi kullanın). (5 pts.)

**6e**. $T \cap (A' \setminus f(T)) = \emptyset$ olduğunu gösterin. (5 pts.)

**6f** $B$ ile $A$ arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösterin. (İpucu d ve e yi kullanın). (5 pts.)