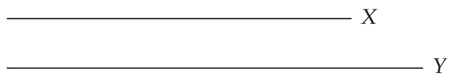
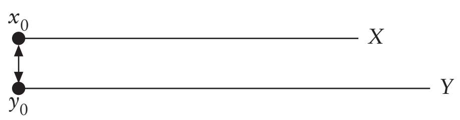
7. İyisıralamaları Birbirine Gömmek

İki iyi sıralama alalım: (X, <) ve (Y, <). Bunlar tamsıralama olduklarından, her ikisini de aşağıdaki şekildeki gibi birer doğru üzerinde temsil ederek çok büyük bir yalan söylemiş

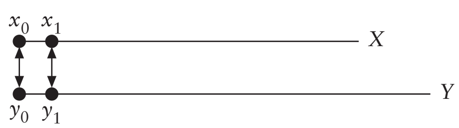


olmayız. (Temsilde sağdaki elemanlar soldakilerden daha büyük olacaklar.)

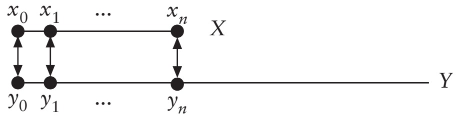
Eğer X ve Y boşküme değillerse her ikisinin de birer en küçük elemanı vardır. Bu elemanlara sırasıyla x_0 ve y_0 diyelim.



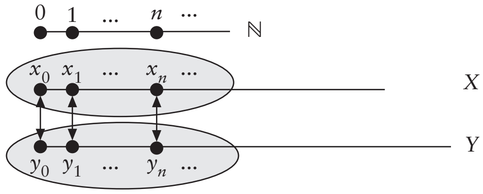
Eğer X ve Y'de eleman kalmışsa o zaman x_0 ve y_0'dan hemen sonra gelen elemanlar vardır. Bu elemanlara sırasıyla x_1 ve y_1 diyelim.



Bunu böyle "sürdürebileceğimiz kadar" sürdürelim. Eğer X ya da Y sonlu adımda biterse, önce bitenden diğerinin başlangıç dilimine giden bir eşyapı fonksiyonu buluruz.



Eğer X ya da Y sonlu adımda bitmezse, o zaman her ikisinde de $\mathbb{N}$'ye eşyapısal olan bir "başlangıç dilimi" var demektir.



Daha fazla devam etmeden (çünkü bu tür akıl yürütmeler tehlikeli sularda yüzmek demektir), biraz teori yapalım, en azından kullandığımız "başlangıç dilimi" terimini tanımlayalım. Önce okurun sezgisine hitap edelim: Amacımız iki iyisiralı kümeyi, ilk elemanlarından başlayarak ve gidebildiğimiz kadar giderek, birbiriyle eşleştirmeye çalışmak. İkisinden birinin diğerinden daha önce tükeneceğini umup tükeneni diğerinin "başlangıç dilimine" gömmek. Okur okumaya devam etsin, her şey zamanla arzulanan matematiksel açıklığa kavuşacak.

7.1. Başlangıç Dilimi

$(X, <)$ bir iyisıralama olsun. $I \subseteq X$ bir altküme olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$y \leq x \in I$$

koşulları doğru olduğunda,

$$y \in I$$

oluyorsa, I'ya ***başlangıç dilimi*** (İngilizcesi *initial segment*) adı verilir. Örneğin X'in kendisi bir başlangıç dilimidir. Daha ilginç örnekler: Her $a \in X$ için,

$$\{x \in X : x < a\}$$

ve

$$\{x \in X : x \leq a\}$$

kümeleri X'in birer başlangıç dilimleridir. Bunlardan başka da başlangıç dilimi yoktur, yani eğer bir başlangıç dilimi X'ten değişikse, o zaman bu başlangıç dilimi, belli bir $a \in X$ için,

$$\{x \in X : x < a\}$$

kümesine eşit olmalıdır. Nitekim $I \subset X$ bir başlangıç dilimi olsun. a, $X \setminus I$ kümesinin en küçük elemanı olsun. Elbette

$$\{x \in X : x < a\} \subseteq I$$

olur. İçindeliğin diğer istikametini kanıtlayalım. $x \in I$ olsun. Eğer $a \leq x$ ise, başlangıç diliminin tanımından dolayı $a \in I$ olmalı, ki bunun yanlış olduğunu biliyoruz. Demek ki $x < a$. İstediğimizi kanıtladık.

Eğer $I \neq X$ bir başlangıç dilimi ise, i^+, $X \setminus I$ kümesinin en

küçük elemanını simgeleyecek. Yani i^+, X'in I'nin bütün elemanlarından daha büyük olan en küçük elemanıdır. Demek ki

$$I = \{x \in X : x < i^+\}.$$

Bu arada $I \cup \{i^+\}$ kümesinin de bir başlangıç dilimi olduğuna dikkatinizi çekerim. Eğer başlangıç dilimine J ya da K dersek, bu elemanları j^+ ve k^+ diye anacağız.

Bu bulduğumuzu sık sık kullanacağız; not edelim:

Önsav 7.1. *X'in bir başlangıç dilimi ya X'e eşittir ya da bir a in X için $\{x \in X : x < a\}$ biçiminde bir kümedir.*

Sonuç 7.2. *Eğer I ve J, X'in birer başlangıç kümesiyse, ya $I \subseteq J$ ya da $J \subseteq I$.*

Kanıt: Eğer I ya da J, X ise, sorun yok. Böyle olmadığını varsayalım. Eğer $i^+ \leq j^+$ ise $I \subseteq J$, aksi halde $J \subseteq I$. □

Aşağıdaki sonuç da yukardakinden çıkar ama biz çeşni olsun diye başka bir kanıt vereceğiz.

Önsav 7.3. $\wp$, *elemanları* X*'in bazı başlangıç dilimlerinden oluşan bir küme olsun. O zaman* $\cup\wp$, *yani* $\bigcup_{I\in\wp} I$ *bir başlangıç dilimidir.*

Kanıt: $x \in \bigcup_{I\in\wp} I$ ve $y < x$ olsun. Demek ki bir $I \in \wp$ için $x \in I$. Ama I bir başlangıç dilimi. Demek ki $y \in I$. Dolayısıyla $y \in \bigcup_{I\in\wp} I$. □

Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda X iyisıralı bir kümeyi simgeleyecek.

7.1.1. Eğer I ve J, X'in birer başlangıç dilimiyse, ya $I \subseteq J$ ya da $J \subseteq I$ olduğunu kanıtlayın.

7.1.2. $\wp$, her elemanı X'in bir başlangıç dilimi olan bir küme olsun. O zaman $\cap\wp$ kümesinin, yani $\bigcap_{I\in\wp} I$ kümesinin de X'in bir başlangıç dilimi olduğunu kanıtlayın.

7.1.3. Y iyisıralı küme olsun. $f : X \to Y$, X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir eşyapı fonksiyonu olsun. $I \subseteq X$ bir başlangıç dilimiyse, $f(I)$'nın Y'nin de bir başlangıç dilimi olduğunu gösterin.

7.1.4. $\wp \neq \emptyset$, her elemanı X'in bir başlangıç dilimi olan bir küme olsun. $\wp$'nin en küçük bir elemanı olduğunu kanıtlayın; yani öyle bir $I \in \wp$ elemanının varlığını kanıtlayın ki, her $J \in \wp$ için $I \subseteq J$ olsun.

7.1.5. X'in en büyük elemanının olmadığını varsayalım. $\wp$, X'in X'e eşit olmayan başlangıç dilimlerinin kümesi olsun. $\bigcup_{I\in\wp} I = X$ eşitliğini kanıtlayın.

7.1.6. A, X'in bir altkümesi olsun.

$$I(A) = \{x \in X : x, A\text{'nın bir elemanından küçükeşit}\}$$

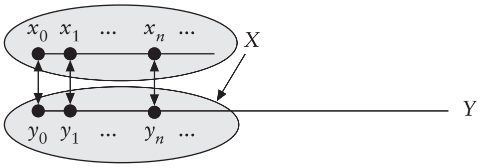
olsun. $I(A)$'nın bir başlangıç dilimi olduğunu kanıtlayın. $I(A)$'nın A'yı içeren başlangıç dilimlerinin en küçüğü olduğunu kanıtlayın. $I(A)$'nın X'in A'yı içeren tüm başlangıç dilimlerinin kesişimi olduğunu kanıtlayın.)

7.1.7. $J = \cup_{I \in \wp} I$ olsun. $\{i^+ : I \in \wp\}$ kümesiyle j^+ elemanı arasında nasıl bir ilişki vardır?

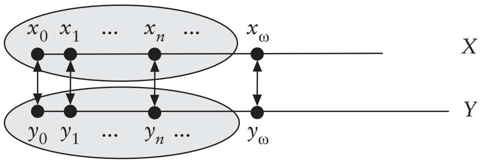
7.1.8. $I \subseteq Y \subseteq X$ olsun ve I, hem X'in hem de Y'nin başlangıç dilimi olsun. i^+ elemanı X'te ve Y'de farklı elemanlar olabilir. Aslında, i^+ yerine $i^+(X)$ ve $i^+(Y)$ yazmak gerekir. $i^+(X) \leq i^+(Y)$ eşitsizliğini kanıtlayın.

7.2. Gömme Teoremi (1)

Bölümün başında tanımladığımız x_n ve y_n elemanlarını anımsayalım. Eğer X ve Y'den biri sadece bu x_n ve y_n elemanlarından oluşmuşsa, o zaman, bu elemanlardan oluşandan (aşağıdaki resimde X'ten) diğerinin başlangıç dilimine giden bir eşyapı fonksiyonu vardır.



Eğer hem X'te hem de Y'de eleman kalmışsa, x_ω ve y_ω kalan elemanların en küçüğü olsun.



Bunu böylecene sürdürebiliriz ve X ya da Y'nin elemanlarını bir zaman sonra tüketebiliriz. Böylece, önce tükeneni diğerinin bir başlangıç dilimine gömebiliriz... gibi bir hisse kapılabilir insan ilk anda ama ikinci anda bundan matematiksel olarak henüz emin olamayacağımızı anlarız...

Yukardaki akıl yürütmenin beyne değil hislere hitap ettiğinin farkına vardınız mı? Matematikte "bunu böylecene sürdürebiliriz" diye bir tümce yazılamaz, böyle bir tümce ancak edebiyat sınıfına girebilir. Oysa burada matematik yapılmaktadır.

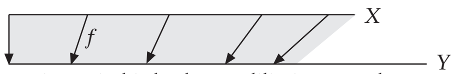
Bu bölümde yukardaki edebiyatı matematiğe dönüştürerek şu teoremi kanıtlayacağız.

Teorem 7.4. (X, <) *ve* (Y, <) *iki iyisıralama olsun. O zaman ikisinden birinden diğerinin bir başlangıç dilimine giden bir eşyapı fonksiyonu vardır ve bu başlangıç dilimi ve eşyapı fonksiyonu birer tanedir. Ayrıca her ikisinden de diğerinin başlangıç dilimine giden eşyapı fonksiyonları varsa, bu eşyapı fonksiyonları eşyapı eşlemeleri* (*izomorfizma*) *olmak zorundadır.*

Teoremi şöyle yazmayı tercih ediyoruz:

Teorem 7.4′. (X, <) *ve* (Y, <) *iki iyisıralama olsun. O zaman ikisinden biri diğerinin başlangıç dilimine gömülür. Ayrıca her ikisi de diğerinin başlangıç dilimine gömülüyorsa, bu gömmeler eşyapı eşlemeleri* (*izomorfizma*) *olmak zorundadırlar.*

Matematiksel tanımı verelim ki sonradan maraza çıkmasın. (X, <) ve (Y, <) birer iyisıralama olsun. $f : X \to Y$ sıralamayı koruyan bir fonksiyon olsun, yani $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ ol-



X'in Y'nin bir başlangıç dilimine gömülüşü

sun. Bir de ayrıca $f(X)$'in Y'nin bir başlangıç dilimi olduğunu varsayalım. O zaman f'nin X'in Y'nin bir ***başlangıç dilimine gömülüşü*** olduğunu ya da f'nin X'i Y'nin bir ***başlangıç dilimine gömdüğünü*** ya da X'in Y'nin ***başlangıç dilimine gömüldüğünü*** söyleyeceğiz.

Teoremi kanıtlamak biraz zaman alacak. İyisıralamalarda tümevarımla kanıt ilkesini sık sık kullanacağız. (Bkz. Teorem 6.3.)

Bundan böyle X ve Y, iyisıralanmış birer küme simgeleyecekler.

Bir sonraki önsavın tümevarımda nasıl kullanılacağını görmek için kâhin olmaya gerek yok.

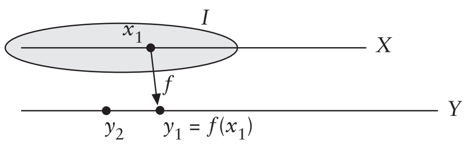
Önsav 7.5. *f, X'in Y'nin bir başlangıç dilimine bir gömülüşü olsun. I, X'in bir başlangıç dilimi olsun.*

i. *O zaman $f(I)$, Y'nin bir başlangıç dilimidir, yani f'nin I'ya kısıtlanışı olan $f_{|I}$ fonksiyonu I'nin Y'nin bir başlangıç dilimine gömülüşüdür.*

ii. *Eğer $I \neq X$ ve $J = f(I)$ ise, $f(i^+) = j^+$* olur.

Kanıt: i. $y_1 \in f(I)$ ve $y_2 < y_1$ olsun. y_2'nin $f(I)$'da olduğunu kanıtlayacağız.

Madem ki $y_1 \in f(I)$, $f(x_1) = y_1$ eşitliğini sağlayan bir $x_1 \in I$ vardır.

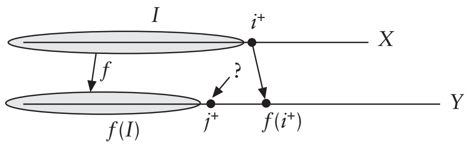


$y_1 \in f(X)$ ve $f(X)$ bir başlangıç dilimi olduğundan, y_1'den küçük olan y_2 de $f(X)$'in bir elemanıdır. $f(x_2) = y_2$ eşitliğini sağlayan bir $x_2 \in X$ elemanı alalım.

$$f(x_2) = y_2 < y_1 = f(x_1)$$

olduğundan, $x_2 < x_1$ olmalı. Ama $x_1 \in I$. Demek ki $x_2 \in I$ ve $y_2 = f(x_2) \in f(I)$.

ii. i^+, I'nin bütün elemanlarından daha büyük olduğundan, $f(i^+)$, $f(I)$'nin bütün elemanlarından daha büyük olmalı. Demek ki $j^+ \leq f(i^+)$. Dolayısıyla ($f(X)$ bir başlangıç dilimi olduğundan) $j^+ \in f(X)$ ve bir $x \in X$ için, $f(x) = j^+$ olmalı. $f(x) = j^+ \leq f(i^+)$ oldu-



ğundan, $x \leq i^+$ olmalı. Eğer $x < i^+$ ise, o zaman $x \in I$ ve $f(x) \in f(I)$ olur ki bu da $f(x) = j^+ \notin f(I)$ ile çelişir. Demek ki $x = i^+$. □

Önsav 7.6. *X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine en fazla bir gömme vardır.*

Kanıt: f ve g, X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden iki gömme olsun. Her $x \in X$ için $f(x) = g(x)$ eşitliğini kanıtlayacağız. Demek ki,

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

tanımını yaparsak, A'nın X'e eşit olduğunu kanıtlamamız gerekiyor. Tümevarımla kanıt ilkesini kullanacağız.

$x \in X$ olsun ve $I = \{y \in X : y < x\}$ kümesinin A'nın bir altkümesi olduğunu varsayalım. Eğer x'in de A'da olduğunu kanıtlarsak, tümevarım ilkesine göre A'nın X'e eşit olduğunu kanıtlamış olacağız ve önsavımız kanıtlanmış olacak.

Ama $x = i^+$ ve Önsav 7.5.ii'ye göre, $f(I) = J = g(I) = K$ ise,

$$f(x) = f(i^+) = j^+ = k^+ = g(i^+) = g(x).$$

Demek ki $x \in A$. □

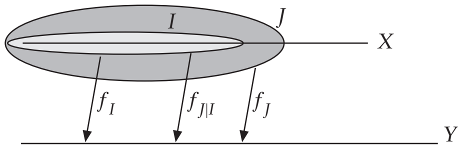
Yukardaki önsava göre X'in bir başlangıç diliminden Y'nin bir başlangıç dilimine en fazla bir tane gömme vardır. Nitekim eğer I, X'in bir başlangıç dilimiyse, Önsav 7.6'yı X yerine I'ya uygulayabiliriz.

Sonuç 7.7. *Özdeşlik fonksiyonu* Id, *X'ten X'in bir başlangıç dilimine giden bir gömmedir. Önsav 7.6'dan dolayı X'ten X'in bir başlangıç dilimine giden başka da böyle bir gömme yoktur.* □

Teoremin Birinci Yarısının Kanıtı: $\wp$, Y'nin bir başlangıç dilimine gömülen X'in başlangıç dilimleri kümesi olsun. Yani, $\wp = \{ I \subseteq X : I$, X'in başlangıç dilimi ve I'dan Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir gömme var$\}$ olsun.

Önsav 7.6'ya göre, eğer $I \in \wp$ ise, I'dan Y'nin bir başlangıç kümesine giden sadece bir tane gömme vardır. Bu gömmeye f_I adını verelim.

Eğer I ve J, X'in iki başlangıç dilimiyse, Sonuç 7.2'ye göre ya $I \subseteq J$ ya da $J \subseteq I$. Diyelim $I \subseteq J$. Şimdi, f_J gömmesi J'den Y'ye gidiyor, ve $I \subseteq J$ olduğundan, f_J fonksiyonunu I' da değerlendirebiliriz. Önsav 7.5'e göre $f_{J|I}(I)$ de Y'nin bir başlangıç di-



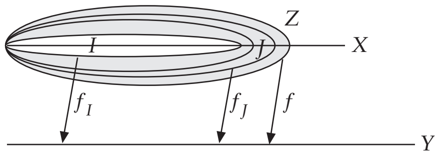
limidir ve $f_{J|I}$ da f_I gibi, I'dan Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir gömmedir. Önsav 7.6'ya göre,

$$f_{J|I} = f_I.$$

Demek ki, her $x \in I$ için, $f_I(x) = f_{J|I}(x) = f_J(x)$.

Şimdi $Z = \cup \wp = \bigcup_{I \in \wp} I$ olsun. Z'nin $\wp$'de olduğunu kanıtlayacağız. Bu da Z'nin $\wp$'nin en büyük elemanı olduğunu gösterecek, çünkü ne de olsa Z, $\wp$'nin elemanlarının bileşimi. Yani Z, Y'nin bir başlangıç dilimine gömülen X'in en büyük başlangıç dilimi olacak.

Önsav 7.3'e göre Z, X'in bir başlangıç dilimidir. Z'den Y'ye giden bir f fonksiyonu tanımlayacağız. $x \in Z$ olsun. O zaman bir $I \in \wp$ için $x \in I$. Şimdi $f(x)$'i $f_I(x)$ olarak tanımlayalım. Bu tanım "yasal"dır çünkü, I yerine, x'in içinde bulunduğu bir başka $J \in \wp$ başlangıç dilimi seçseydik, bir üstteki paragrafta yaptıklarımızdan dolayı $f_I(x) = f_J(x)$ olurdu. Yani $f(x)$'in tanımı, seçilen I başlangıç diliminden bağımsızdır, yeter ki x, I'da olsun. Bu da tanımın yasal olduğunu gösterir.

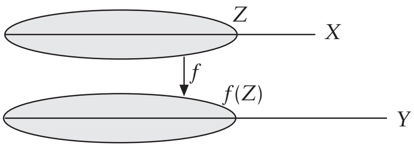


Şimdi f'nin sıralamaya saygı duyan bir fonksiyon olduğunu kanıtlayacağım. Bunun kanıtı oldukça kolay. $y < x \in Z$ olsun. Demek ki bir $I \in \wp$ için $x \in I$. O zaman y de I'da. Demek ki,

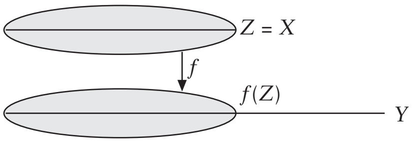
$$f(y) = f_I(y) < f_I(x) = f(x).$$

Böylece f'nin sıralamaya saygı duyduğunu kanıtlamış olduk.

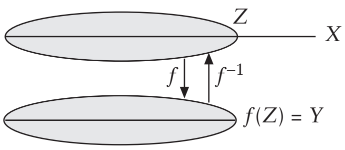
Önsav 7.3'ten dolayı $f(Z)$'nin Y'nin bir başlangıç dilimi olduğunu biliyoruz. Demek ki f, Z'den Y'nin bir başlangıç dilimine bir gömme. Dolayısıyla $Z \in \wp$ ve Z, $\wp$'nin en büyük elemanı. Durum şöyle:



Eğer $Z = X$ ise işimiz bitmiştir, çünkü o zaman X, Y'nin bir başlangıç dilimine gömülür.



Eğer $f(Z) = Y$ ise de işimiz bitmiştir, çünkü o zaman Y, f^{-1} sayesinde X'in bir başlangıç dilimine (Z'ye) gömülür.

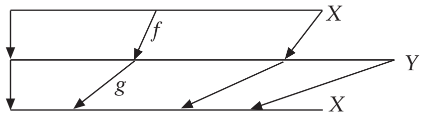


Şimdi $Z \neq X$ ve $f(Z) \neq Y$ varsayımlarını yapalım. Bir çelişki elde edeceğiz. $T = f(Z)$ olsun. Bu durumda z^+ ve t^+ elemanları vardır. Şimdi X'in $Z \cup \{z^+\}$ başlangıç kümesinden Y'nin

$$f(Z) \cup \{t^+\}$$

başlangıç kümesine giden ve sıralamayı koruyan bir fonksiyon bulabiliriz. Bunun için, Z üzerine tanımlı olan f'yi z^+ elemanını t^+ elemanına götürecek biçimde genişletmek yeterli. Ama o zaman da $Z \cup \{z^+\} \in \wp$ olur. Bu da Z'nin $\wp$'nin en büyük elamanı olmasıyla çelişir. □

Teoremin İkinci Yarısının Kanıtı: f, X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir gömme olsun. g, Y'den X'in bir başlangıç



dilimine giden bir gömme olsun. O zaman, $g \circ f$, X'ten X'in bir başlangıç dilimine giden bir gömmedir. Önsav 7.6'ya göre

$$g \circ f = \mathrm{Id}_X.$$

Demek ki her $x \in X$ için $g(f(x)) = x$. Dolayısıyla g örtendir, yani bir eşyapı eşlemesidir. (g'nin birebir olduğunu zaten biliyoruz.)

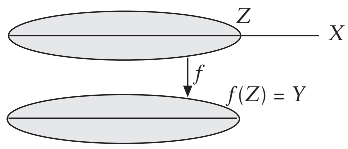
Eğer f örten değilse, o zaman Y'de her $x \in X$ için, $f(x) < u$ eşitsizliğini sağlayan bir u elemanı vardır. Bu eşitsizliğin her iki tarafına da g'yi uygularsak, her $x \in X$ için, $x = g(f(x)) < g(u)$, yani

$$x < g(u)$$

olur. Bu eşitlikte eğer $x = g(u)$ alırsak, ki g örten olduğundan bunu yapabiliriz, bir çelişki elde ederiz. Demek ki f de örtendir, yani f de bir eşyapı eşlemesidir. □

Yukardaki teoremin kanıtından aşağıdaki sonuç çıkar:

Kanıtın Sonucu 7.8. *X ve Y birer iyisıralama olsun. O zaman, Y'nin bir başlangıç dilimine gömülen X'in bir en büyük Z başlangıç dilimi vardır ve bir tanedir. Ayrıca eğer $Z \neq X$ ise bu gömme örten olmak durumundadır, yani $Z \approx Y$'dir.*



Kanıt: Nitekim kanıtta bulunan X'in Z altkümesi tam bu başlangıç dilimidir. □

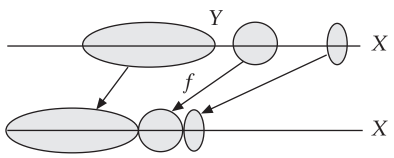
7.3. Gömme Teoremi (2)

Yukarda iyisıralı kümeleri birbirine gömdük. Burada iyisıralı bir kümenin heraltkümesini iyisıralı kümenin bir başlangıç dilimine gömeceğiz.

Teorem 7.9. *İyisıralı bir X kümesinin her altkümesi* (*iyisıralı bir küme olarak*) *X'in tek bir başlangıç dilimine ve tek bir biçimde gömülür.*

Teoremin Tartışması. Gömmenin biricikliği Teorem 7.4'ten çıkar ama gömmenin varlığı aynı teoremden çıkmaz.

İyisıralı küme X olsun, altkümesi de Y olsun. Aşağıdaki şekilden de görüleceği üzere X'in Y altkümesini sola kaydıracağız. Sorun, bu "sola kaydırma"yı matematikçe ifade edip teoremi kanıtlamak. Ve aslında teoremi kanıtlamakta karşılaşılan tek sorun bu.



Teorem, solda her zaman Y için **yeterince** yer olduğunu söylüyor. Yani arka kapıdan binilen bir otobüste, ayaktaki yolcular ön kapıya doğru ilerleyip yanyana durabilirler, yolcular ön kapıya doğru ilerlediklerinde arkada yer açılır, otobüste yer kalmaması diye bir sorun yaşanmaz, yolcu sayısı sonsuz, hatta çok çok sonsuz bile olsa...

Engin deneyimime göre birinci sınıf matematik öğrencileri burada neyin kanıtlanması gerektiğini anlayamıyorlar. "Elbette Y'nin elemanlarını sola doğru itekleyebiliriz" diyorlar. Belki Y sonluysa 'elbette' de, Y sonsuz olduğunda "elbette" kanıtı hafif kaçabilir. Ayrıca, bariz bile olsa, matematikte her şeyin kanıtlanması gerekir.

Bir derste iki saatimi bu "itelemenin" hiç de bariz olmadığını, burada bir şeylerin kanıtlaması gerektiğinin anlaşılmasına harcadığımı anımsıyorum. Öğrencilerden ısrarla "sola kaydırmayı" matematikçeye çevirmelerini istedim. Sonunda buldular. "Sola kaydırmak" demek "f gömmesi artmayan bir fonksiyondur" demektir, yani her $y \in Y$ için $f(y) \leq y$ eşitsizliği geçerlidir demektir. "Y'yi sola kaydırmak" edebiyattır, oysa

"her $y \in Y$ için $f(y) \leq y$"

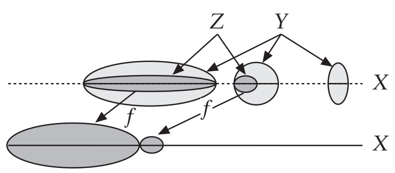
matematiktir. (Bkz. aşağıdaki kanıttaki Arasav.)

Öğretmen arkadaşlarıma yukardaki aşamayı ısrarla öğrencilere atlatmalarını öneririm. Bu alıştırma matematiğin ne olduğunu öğretme konusunda son derece faydalıdır.

Teorem 7.9'un Kanıtı: X'in altkümesine Y diyelim. Y de iyisıralı bir altkümedir (iyisıralamayı X'ten miras almıştır.) Yukarda kanıtladığımız teoreme göre ya X, Y'nin ya da Y, X'in bir başlangıç dilimine gömülür. Dolayısıyla eğer X, Y'nin başlangıç dilimine gömülmüyorsa o zaman teoremimiz kanıtlanmıştır. Ama ne yazık ki X bazen Y'nin başlangıç dilimine gömülebilir. Örnek: $X = \mathbb{N}$ ve $Y = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ise, $f(x) = x + 1$ fonksiyonu X'i Y'ye (ki Y, Y'nin bir başlangıç dilimidir) gömer. Dolayısıyla bu kanıt denemesi fiyaskoyla sonuçlanır.

Bir başka yol bulmalıyız.

Biraz önce çıkardığımız sonucu (Sonuç 7.8'i) kullanacağız. O sonuçta X ile Y'nin yerlerini değiştirelim. O zaman X'in bir başlangıç dilimine gömülen Y'nin en büyük bir başlangıç dilimi vardır. Bu başlangıç dilimine Z diyelim. Z'nin Y'ye eşit olduğunu kanıtlamak istiyoruz.



Z'yi X'in başlangıç dilimine gömen gömmeye f diyelim. Z'nin Y'ye eşit olmadığını varsayıp bir çelişki elde etmeye çalışalım. Eğer $Z \neq Y$ ise, o zaman Sonuç 7.8'e göre $f(Z) = X$ olmalı. (Kanıtı anımsayın: Yoksa f'yi bir adım daha genişleterek Z'den daha büyük bir başlangıç dilimi bulabiliriz ve bu bir çelişki olur.)

Arasav. *Her $z \in Z$ için $f(z) \leq z$.*
Savın Kanıtı: Savı tümevarımla kanıtlayacağız.

$$A = \{z \in Z : f(z) \leq z\}$$

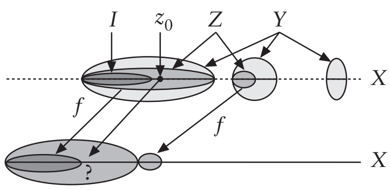
olsun. A'nın Z'ye eşit olduğunu tümevarımla kanıtlayacağız. Bir $z_0 \in Z$ için, Z'nin z_0'dan küçük elemanlarının A'da olduklarını varsayıp, z_0 elemanının A'da olduğunu kanıtlayalım. Yani

$$I = \{z \in Z : z < z_0\} \subseteq A$$

varsayımında bulunup $z_0 \in A$ ilişkisini kanıtlayalım. Ama $i^+ = i^+(Z) = z_0$ ve Önsav 7.5.ii'ye göre, $J = f(I)$ ise,

$$f(z_0) = f(i^+) = j^+.$$

Öte yandan her $z \in I \subseteq A$ için, $f(z) \leq z < z_0$. Demek ki z_0, $f(I)$'nin her elemanından daha büyük, yani $j^+ \leq z_0$. Bundan da $f(z_0) = f(i^+) = j^+ \leq z_0$ çıkar. Arasavımız kanıtlanmıştır.

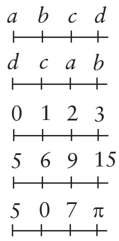


Şimdi teoremin kanıtının sonunu getirebiliriz. Eğer $Z \neq Y$ ise, o zaman $Y \setminus Z$ boşküme değildir. $Y \setminus Z$ kümesinden bir y elemanı alalım. O zaman, her $z \in Z$ için, $f(z) \leq z < y$. Dolayısıyla y, $f(Z)$'de değil. Demek ki $f(Z) \neq X$ ve bu, Sonuç 7.8'le çelişir. □

Sonuç 7.10. *Eğer bir X iyisıralamasından bir Y iyisıralamasına giden sıralamayı koruyan bir fonksiyon varsa, o zaman X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir (ve bir tek) gömme vardır.*

8. Eşyapısallık ve Gömme

Dört elemanlı ve iyisıralı çok küme vardır. Tam 24 tane. Hepsinin resmini yapamayız (yeterince yer ve zaman yok!) ama birkaçının resmini yanda yaptık. Resimde beş tane iyisıralı (ya da tamsıralı, aynı şey) dört elemanlı küme görüyorsunuz. Elemanların soldan sağa doğru sıralandığını varsayıyoruz: Küçükler solda, büyükler sağda. Örneğin sonuncusunda $5 < 0 < 7 < \pi$, doğal sıralamadan farklı bir sıralama belli ki. Dört elemanlı her tamsıralı kümenin elemanlarını küçükten büyüğe doğru,



$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3$$

olarak dizebiliriz. Dolayısıyla 4 elemanlı her tamsıralı küme,

$$0 < 1 < 2 < 3$$

olarak tamsıralanmış $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesine benzer. Dört elemanlı çok iyisıralı küme var ama hepsi birbirine benzer. Bunların hepsi "eşyapısal"dır.

8.1. Eşyapısallık

X ve Y tamsıralanmış iki küme olsun. Her iki sıralamayı da $<$ simgesiyle gösterelim. Aslında X'in sıralamasını $<_X$ ile Y'nin sıralamasını $<_Y$ ile göstermek gerekiyor, çünkü, örneğin X, Y'ye eşit bile olsa üzerlerindeki sıralamalar farklı olabilir. Eğer bir $f : X \to Y$ fonksiyonu,

$$\text{her } x_1, x_2 \in X \text{ için, } x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

özelliğini sağlıyorsa, f'ye ***eşyapı fonksiyonu*** ya da ***morfizma*** adı verilir. Yani eşyapı fonksiyonları elemanların sıralamalarını değiştirmezler, matematiksel deyimle "sıralamaya saygı duyarlar".

Bir eşyapı fonksiyonu birebir olmak zorundadır, çünkü eğer $f(x_1) = f(x_2)$ ise ne $x_1 < x_2$ olabilir ne de $x_2 < x_1$, demek ki $x_2 = x_1$ olmak zorundadır. Bu yüzden eşyapı fonksiyonlarına ***gömme*** de denir. Eğer f ayrıca örtense, f'ye ***eşyapı eşlemesi*** ya da ***izomorfizma*** denir. Bu durumda tamsıralı X ve Y kümelerine ***eşyapısal tamsıralamalar*** ya da ***izomorfik*** denir ve $X \approx Y$ yazılır.

Eşyapısallığın ortaya çıkarmaya çalıştığı şey şu: Eğer $X \approx Y$ ise, X ve Y tamsıralamaları arasında elemanlarının adları dışında hiçbir fark yoktur.

Eğer n bir doğal sayıysa n elemanlı tüm tamsıralamalar birbirine eşyapısaldır. Nitekim, X ve Y, n elemanlı iki tamsıralama olsunlar. X ve Y'nin elemanlarını küçükten büyüğe doğru

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$$

ve

$$y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1}$$

olarak tamsıralayalım. Şimdi $f(x_i) = y_i$ olarak tanımlanmış f fonksiyonu X'le Y arasında bir eşyapı eşlemesidir.

Sonsuz tamsıralamalar çok değişik olabilirler ama. Örneğin, doğal sıralanmış $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri birbirinden değişiktirler, yani aralarında eşyapı eşlemesi olamaz. Açıklayalım: Doğal sıralanmış $\mathbb{N}$ kümesi bir iyisıralamadır, örneğin $\mathbb{N}$'nin bir en küçük elemanı vardır: 0. Öte yandan diğerlerinin en küçük elemanı yoktur. Demek ki $\mathbb{N}$ diğerlerinden biriyle (doğal sıralama altında) eşyapısal olamaz. $\mathbb{Q}$ ise ***yoğun*** bir sıralamadır, yani herhangi iki elemanı arasında bir eleman vardır. $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ yoğun olmadıklarından bu özellik $\mathbb{Q}$'yü $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$'den ayrıştırır. Aynı nedenden $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{N}$ ya da $\mathbb{Z}$ eşyapısal olamaz. $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{Q}$ arasındaki ayrımı görmek için sıralamalar dünyasından çıkmamız lazım. Doğal sıralanmış $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{Q}$ kümeleri arasında sıralama bakımından "pek" bir ayrım yoktur. ("Pek bir ayrım yoktur" tümcesine matematiksel bir anlam verilebilir ama konumuz bu değil; okur bu tümceyi hafife alarak okusun.) $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{Q}$ sıralı kümeleri arasındaki ayrım sıralamadan değil "eleman sayısından" kaynaklanır: $\mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuzluktadır, ama $\mathbb{R}$ sayılabilir sonsuzlukta değildir, dolayısıyla $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{Q}$ kümeleri arasında, bırakın bir eşyapı eşlemesini, eşleme bile yoktur!

Şimdi eşyapı fonksiyonlarının ve eşyapısallığın birkaç özelliğini görelim.

E1. Eğer X, Y ve Z tamsıralı üç kümeyse ve

$$f : X \to Y \text{ ve } g : Y \to Z$$

birer eşyapı eşlemesiyse (fonksiyonuysa), o zaman

$$g \circ f : X \to Z$$

bir eşyapı eşlemesidir (fonksiyonudur) elbette. Sonuç: $X \approx Y$ ve $Y \approx Z$ ise $X \approx Z$ olur.

E2. Eğer X ve Y tamsıralı iki kümeyse ve

$$f : X \to Y$$

bir eşyapı eşlemesiyse , o zaman

$$f^{-1} : Y \to X$$

bir eşyapı eşlemesidir. Bunun kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır. Sonuç: $X \approx Y$ ise $Y \approx X$ olur.

E3. Eğer X tamsıralı bir kümeyse, $\mathrm{Id}_X(x) = x$ olarak tanımlanmış,

$$\mathrm{Id}_X : X \to X$$

özdeşlik fonksiyonu bir eşyapı eşlemesidir. Sonuç: $X \approx X$'tir.

Bu üç özelliği daha simgesel bir yazıyla yazalım:

E1. $X \approx Y$ ve $Y \approx Z$ ise $X \approx Z$.
E2. $X \approx Y$ ise $Y \approx X$.
E3. $X \approx X$'tir.

Görüldüğü üzere tamsıralı kümeler arasında tanımladığımız $\approx$

ilişkisi sanki eşitlikmiş gibi davranıyor. Ama eşitlik olmadığı gibi, denklik ilişkisi bile değildir çünkü tamsıralı kümelerden oluşan bir küme yoktur. Birazdan, iyisıralı kümeler arasında, tamsıralama gibi davranan bir $\preccurlyeq$ ilişkisi bulacağız. (Acele davranıp tanımı hemen verelim: X'ten Y'ye giden bir eşyapı fonksiyonu varsa, bunu $X \preccurlyeq Y$ olarak göstereceğiz.)

Tamsıralanmış bir kümeden gene kendisine giden eşyapı eşlemelerine ***eşyapı eşleşmesi*** ya da ***otomorfizma*** adı verilir. Örneğin Id_X her zaman bir eşyapı eşleşmesidir.

X'in eşyapı eşleşmeleri kümesi Aut X olarak yazılır. Yukardaki üç özellikten şunlar çıkar:

1. $f, g \in \mathrm{Aut}\ X$ ise $f \circ g \in \mathrm{Aut}\ X$.
2. $f \in \mathrm{Aut}\ X$ ise $f^{-1} \in \mathrm{Aut}\ X$.
3. $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Aut}\ X$.

Bir tamsıralamanın tüm eşyapı eşlemelerini bulmak, o tamsıralamayı iyice anlamak demektir. Birkaç örnek verelim:

Örnek 1. X, tamsıralanmış sonlu bir kümeyse, $\mathrm{Aut}\ X = \{\mathrm{Id}_X\}$.

Örnek 2. $\mathrm{Aut}\ \mathbb{N} = \{\mathrm{Id}_\mathbb{N}\}$.

Örnek 3. Daha genel olarak, eğer X iyisıralanmış bir kümeyse, Önsav 7.6'ya göre $\mathrm{Aut}\ X = \{\mathrm{Id}_X\}$ olur.

Örnek 4. $\mathrm{Aut}\ \mathbb{Z} = \{ f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : a \in \mathbb{Z}$ ve $f_a(x) = x + a\}$.

Örnek 5. Aut $\mathbb{Q}$ çok daha karmaşık bir kümedir. Eğer a, $b \in \mathbb{Q}$ ve $a > 0$ ise,

$$f_{a,b}(x) = ax + b$$

kuralıyla tanımlanmış $f_{a,b} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonlarının herbiri $\mathbb{Q}$'nün bir eşyapı eşleşmesidir. Ama $\mathbb{Q}$'nün çok daha fazla eşyapı eşleşmesi vardır. Örneğin,

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{eğer } x \notin (0,1) \textit{ ise} \\ \dfrac{2x}{x+1} & \textit{eğer } x \in (0,1) \textit{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon bir eşyapı eşlemesidir. (Henüz işlemediğimiz kardinal sayıları bilenler için: $\mathbb{Q}$'nün eşyapı eşlemesi sayısı olabilecek en yüksek sayıda, yani $2^{\aleph_0}$ tanedir.)

Alıştırmalar

1. Tüm bir elemanlı kümeleri içeren bir kümenin olamayacağını kanıtlayın. (İpucu: Aksi halde tüm kümeler kümesi olurdu!) Bundan, tüm tamsıralı ya da iyisıralı kümeleri içeren bir kümenin olamayacağını çıkarın.

2. Eğer X ve Y iyisıralı kümelerse, X'le Y arasında en fazla bir tane eşyapı eşlemesi olabilir.

8.2. İyisıralamaları Birbirine Gömmek

X ve Y iki iyisıralı küme olsun. X'ten Y'ye giden bir eşyapı fonksiyonu varsa (ki bunlara gömme dedik), Sonuç 7.10'a göre X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir ve bir tane gömme vardır.

Eğer X iyisıralaması Y iyisıralamasının içine gömülüyorsa, bunu $X \preccurlyeq Y$ olarak gösterelim. Her X, Y, Z iyisıralaması için,

E4. $X \preccurlyeq X$,

E5. $X \preccurlyeq Y$ ve $Y \preccurlyeq Z$ ise $X \preccurlyeq Z$,

E6. $X \preccurlyeq Y$ ve $Y \preccurlyeq X$ ise $X \approx Y$

olur.

Bunlardan ilk ikisini zaten biliyorduk. Üçüncüsü Sonuç 7.7'den dolayı doğru.

E4, E5, E6'ya dikkat ederseniz, bunlar, $\preccurlyeq$ ilişkisinin iyisıralı kümeler üzerinde bir tür sıralama olduğunu söylüyor.

Teorem 7.4'ün birinci kısmı, $\preccurlyeq$ ilişkisinin iyisıralı kümeleri tamsıraladığını söylüyor: Her X ve Y iyisıralaması için,

E7. Ya $X \preccurlyeq Y$ ya da $Y \preccurlyeq X$.