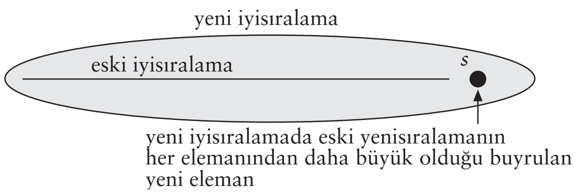
5. Eski İyisıralamalardan Yeni İyisıralamalar Türetmek

Bu bölümde eski iyisıralamalardan yenilerini elde etmeyi öğreneceğiz. Basitten zora doğru gideceğiz.

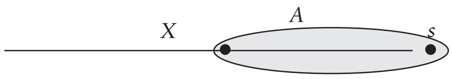
5.1. İyisıralamanın Sonuna Bir Eleman Eklemek. Bu altbölümde, bir iyisıralamanın “en sonuna” yeni bir eleman ekleyeceğiz.



$(X, <)$ bir iyisıralama olsun. s, X’te olmayan bir eleman olsun. X’teki sıralamayı koruyarak ama s’yi X’in her elemanından büyük yaparak $X \cup \{s\}$ kümesini sıralayabiliriz. $X \cup \{s\}$ kümesi üzerine kurulan ve $\prec$ olarak simgeleyeceğimiz bu yeni sıralama biçimsel olarak şöyle tanımlanır: $x, y \in X \cup \{s\}$ için, $x \prec y$ ancak ve ancak

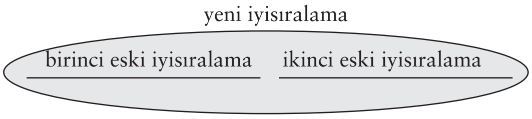
1) $x, y \in X$ ve $x < y$ ise ya da
2) $x \in X$ ve $y = s$ ise.

Bu sıralama da bir iyisıralamadır. Nitekim A, $X \cup \{s\}$ kümesinin boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer $A \cap X \neq \emptyset$ ise, o za-



man $A \cap X$ kümesinin $<$ sıralamasına göre en küçük elemanı A'nın $\prec$ sıralamasına göre en küçük elemanıdır. Öte yandan eğer $A \cap X = \emptyset$ ise o zaman $A = \{s\}$ olmak zorundadır ve s elbette bu durumda A'nın en küçük elemanıdır.

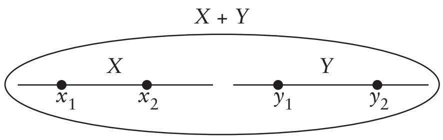
5.2. İki İyisıralamayı Toplamak. Bu altbölümde bir iyisıralamayı bir başka iyisıralamanın "sonuna" ekleyerek bir önceki paragraftaki yöntemi genelleştireceğiz ve yeni bir iyisıralama elde edeceğiz. Bölüm 2.2.4'te bu yöntemden sözetmiştik.



$(X, <)$ ve $(Y, <)$ iki iyisıralama olsun. Şimdilik X ve Y kümelerinin ayrık olduklarını (yani kesişmediklerini) varsayalım. $X \cup Y$ kümesi üzerine, $X + Y$ adını vereceğimiz bir sıralama tanımlayacağız. $X \cup Y$ kümesini, X ve Y'nin sıralamalarını koruyarak, ama Y'nin elemanlarını X'in elemanlarından daha büyük olduklarına hükmederek sıralayalım. Biçimsel tanım şöyle: $u, v \in X \cup Y$ için, $u \prec v$ ancak ve ancak

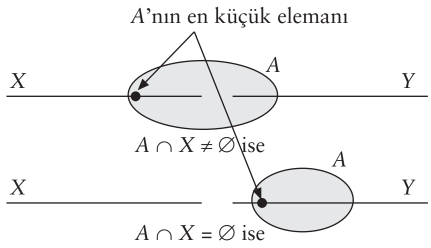
1) $u, v \in X$ ve $u < v$ ise ya da
2) $u, v \in Y$ ve $u < v$ ise ya da
3) $u \in X$ ve $v \in Y$ ise.

$X + Y$ sıralamasının resmi aşağıda.



$X + Y$ sıralaması; $x_1 \prec x_2 \prec y_1 \prec y_2$

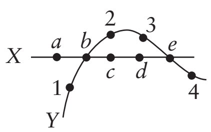
Bu da bir iyisıralamadır. Nitekim A, $X \cup Y$ kümesinin boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer A'nın X'le kesişimi boş değilse, o zaman $A \cap X$ altkümesinin X sıralamasına göre en küçük elemanı A'nın en küçük elemanıdır. Eğer A'nın X'le kesişimi boşsa, o zaman A, Y'nin boş olmayan bir altkümesidir ve



A'nın Y sıralamasındaki en küçük elemanı A'nın $X + Y$'nin sıralamasındaki en küçük elemanıdır.

Eğer X ve Y kümeleri kesişiyorsa, o zaman X yerine $X \times \{0\}$, Y yerine $Y \times \{1\}$ alalım ve X ve Y'nin verilen sıralamalarını sırasıyla $X \times \{0\}$ ve $Y \times \{1\}$ kümelerinin üstüne taşıyalım. Sonra bir önceki paragrafta X ve Y ile yaptığımızı artık ayrık olan $X \times \{0\}$ ve $Y \times \{1\}$ kümeleriyle yapalım.

Bunu bir örnekle gösterelim. X ve Y bir sonraki şekildeki gibi olsunlar.



Yani

$$X = \{a < b < c < d < e\}$$

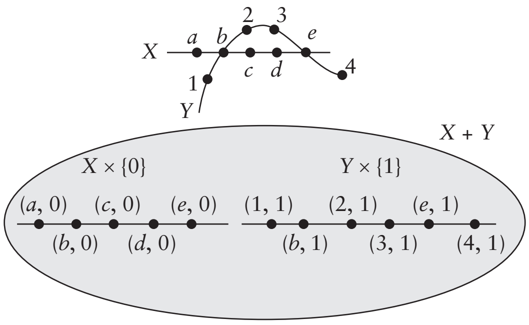
ve

$$Y = \{1 < b < 2 < 3 < e < 4\}$$

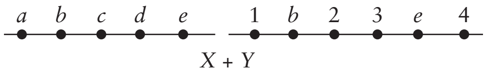
olsun. Bu iki sıralamayı şöyle yazalım:

$$X \times \{0\}: (a,0) < (b,0) < (c,0) < (d,0) < (e,0),$$
$$Y \times \{1\}: (1,1) < (b,1) < (2,1) < (3,1) < (e,1) < (4,1).$$

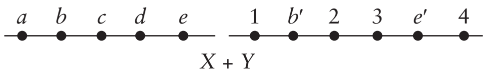
Dikkat ederseniz X'ten $X \times \{0\}$'a geçerken X'in sıralamasını koruduk. Aynı özeni Y için de gösterdik. Şimdi, aşağıdaki şekildeki gibi $X \times \{0\}$'ın elemanlarından hemen sonra $Y \times \{1\}$'in elemanlarını yazalım.



Matematikçi günlük koşuşturma içinde bu kadar çok özen göstermez. X ve Y kesişse bile X ve Y'nin elemanlarını iki kez yazar. Örneğin, profesyonel matematikçi yukardaki örneği,

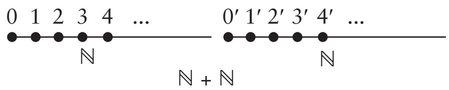


olarak yazar, ama bilir ki birinci b ile ikinci b farklı elemanlardır. Eğer çok başı sıkışırsa, $X + Y$'yi



olarak gösterir.

Örneğin $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ iyisıralaması, $\mathbb{N}$ iyisıralamasının sonuna aynı sıralamanın bir kopyası konarak elde edilir. İşte resmi:

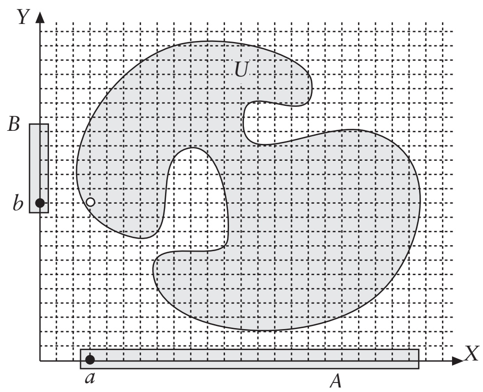


5.3. Alfabetik Sıralama ya da İki İyisıralamayı Çarpmak. $(X, <)$ ve $(Y, <)$ iki iyisıralama olsun. Bu paragrafta $X \times Y$ kümesi üzerine Bölüm 2.2.6'da tanımladığımız alfabetik sıralamanın bir iyisıralama olduğunu kanıtlayacağız. Alfabetik sıralamayı anımsatalım: (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) çiftleri $X \times Y$ kümesininin iki elemanı olsun. Eğer

$$x_1 < x_2$$

ise ya da

$$x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 < y_2$$
ise, (x_1, y_1)'in (x_2, y_2)'den daha küçük olduğu söylenir ve bu
$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$$
olarak yazılır. Bunun bir sıralama olduğu çok belli. Bir iyisıralama olduğunu kanıtlayalım. Aşağıdaki şekilden takip edin. U, $X \times Y$ kümesininin boş olmayan bir altkümesi olsun.
$$A = \{x \in X : \text{bir } y \in Y \text{ için } (x, y) \in U\}$$
olsun. A, boşküme olamaz. Demek ki A'nın bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana a diyelim.
$$B = \{y \in Y : (a, y) \in U\} = (\{b\} \times Y) \cap U$$
olsun. $a \in A$ olduğundan, B boşküme olamaz. Demek ki B'nin de bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana b diyelim. $b \in B$ olduğundan, $(a, b) \in U$.



Şimdi (a, b)'nin U'nun en küçük elemanı olduğunu kanıtayalım. (x, y), U'nun herhangi bir elemanı olsun. Demek ki $x \in A$. Dolayısıyla $x \geq a$. Eğer $x > a$ ise, elbette $(a, b) < (x, y)$. Eğer $x = a$ ise, o zaman $(a, y) = (x, y)$ in U olduğundan, $y \in B$. Demek ki $y \geq b$. Eğer $y > b$ ise, o zaman elbette $(a, b) = (x, b) < (x, y)$. Eğer $y = b$ ise, o zaman $(a, b) = (x, y)$. Kanıtımız tamamlanmıştır.

6. İyisıralamalarda Tümevarım

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'de tümevarımla kanıt yapmasını biliyoruz. Anımsayalım:

Olgu 6.1. [Doğal Sayılarda Tümevarım İlkesi 1]. *$A \subseteq \mathbb{N}$ bir altküme olsun. A'nın şu iki özelliği olduğunu varsayalım*:

1) $0 \in A$.

2) *Her n doğal sayısı için*, *$n \in A$ ise o zaman $n + 1 \in A$.*

Bu durumda $A = \mathbb{N}$'dir.

Bu teoremi doğal sayıları ve doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi tanımladığımız [Sİ] ders notlarında kanıtlamıştık. Aynı ders notlarında bir tümevarım ilkesi daha kanıtlamıştık:

Olgu 6.2. [Doğal Sayılarda Tümevarım İlkesi 2]. *$A \subseteq \mathbb{N}$ bir altküme olsun. X'in şu özelliği olduğunu varsayalım*:

Her n doğal sayısı için, *eğer*

$$\{m \in \mathbb{N} : m < n\} \subseteq A$$

ise, *o zaman $n \in A$.*

Bu durumda $A = \mathbb{N}$'dir.

Bu teoremlerden en azından biri olmadan doğal sayılar hakkında ele avuca sığan bir teorem kanıtlayamayız.

Birinci teorem doğal sayılarda toplamayla ilgili bir şey söylüyor. İkinci teoremde ise toplama yerine sadece $<$ eşitsizliği var. Birinci teoremi olmasa da ikinci teoremi iyisıralamalara genelleştirebiliriz. En azından ikinci teoremin aynısını iyisıralamalar için formüle edip kanıtlamaya çalışabiliriz.

Birinci teorem de, yazıldığı biçimde değil ama buna yakın bir biçimde iyisıralamalara genelleştirilebilir. Bunu daha sonra ordinaller için yapacağız.

Bu bölümün amacı ikinci tümevarım ilkesini doğal sayılardan iyisıralamalara genelleştirmek.

Teorem 6.3. [İyisıralamalarda Tümevarım İlkesi]. $(X, <)$ *bir iyi sıralama olsun.* $A \subseteq X$ *bir altküme olsun.* A*'nın şu özelliği olduğunu varsayalım*:

Her $x \in X$ *için*, *eğer*

$$\{y \in X : y < x\} \subseteq A$$

ise, *o zaman* $x \in A$.

Bu durumda $Y = X$*'dir.*

Kanıt: Diyelim, A, X'e eşit değil. O zaman $X \setminus A$ kümesi boş değildir. Dolayısıyla X iyisıralamasının $X \setminus A$ altkümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x diyelim.

x, $X \setminus A$ altkümesinin en küçük elemanı olduğundan, x'ten küçük hiçbir eleman $X \setminus A$ kümesinde olamaz, yani x'ten küçük her eleman A'dadır. Varsayılan koşula göre x, A'da olmalı. Bir çelişki elde ettik. Demek ki A, X'e eşit olmalı. $\square$

Görüldüğü gibi kanıt çok basit. Nasıl doğal sayılarla ilgili en küçük bir gerçeği kanıtlamak için tümevarım kullanılıyorsa, iyisıralamalarda da en küçük bir şeyi kanıtlamak için tümevarım gerekir. İyisıralamalarda tümevarımsız bir şey kanıtlanamaz desek yeridir. Belki şu tuhaf teorem dışında...

Teorem 6.4. *İyisıralı bir kümede sürekli azalan bir dizi yoktur.*

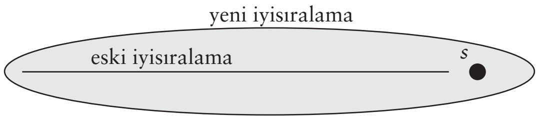
Kanıt: $(X, <)$ iyisıralı bir küme olsun. $(x_n)_n$, X'in sürekli azalan bir dizisi olsun. Demek ki her $n < m$ doğal sayıları için $x_n, x_m \in X$ ve eğer $n < m$ ise $x_m < x_n$. Bir çelişki elde edeceğiz.

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

olsun. A'nın bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x_n diyelim. Ama o zaman $x_{n+1} \in A$ ve $x_{n+1} < x_n$, bir çelişki. □

Bir Uygulama. İyisıralamalarda tümevarımla kanıt tekniğinin bir uygulamasını görelim şimdi.

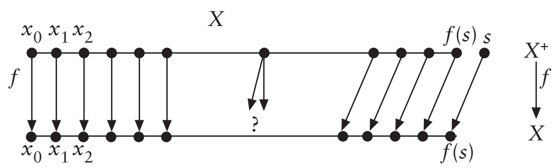
Altbölüm 5.1'de, bir iyisıralamanın sonuna yeni bir eleman ekleyerek yeni bir iyisıralama elde ettik. Yeni iyisıralamanın resmi aşağıdaki gibi.



Eğer X bir iyisıralamaysa, X'in sonuna bir eleman eklenerek elde edilen sıralamaya X^+ diyelim.

Bu bölümde X iyisıralamasıyla X^+ iyisıralamasının gerçekten farklı olduklarını kanıtlayacağız. Daha matematiksel bir deyişle, aralarında bir eşyapı eşlemesi olmadığını kanıtlayacağız. Daha açık bir deyişle, X^+'dan X'e giden ve sıralamayı koruyan (yani artan) bir eşleme olmadığını kanıtlayacağız.

Kanıta girişmeden önce problemi biraz tartışalım. Diyelim X^+'dan X'e giden ve sıralamayı koruyan (yani mutlak artan) bir eşleme var. Bu eşlemeye f diyelim ve f'yi anlamaya çalışalım.



Yukardaki şekilden takip edin. f, X^+ iyisıralamasının ilk elemanlarını (ki bunlar X'in de ilk elemanlarıdır) gene kendilerine götürmeli, yani f başlangıçta her x'i gene kendisine götüren özdeşlik fonksiyonu olmalı. Örneğin X^+'nın ilk elemanı (ki bu X'in ilk elemanıdır) f altında gene X'in ilk elemanına gitmeli, yoksa f hiçbir zaman X'in ilk elemanına değemez ve dolayısıyla örten olamaz.

X'in ilk elemanlarına şekildeki gibi x_n dersek, $f(x_n) = x_n$ eşitliği hemen hemen bariz olmalı. Yani sol tarafta asayiş berkemal, her eleman f altında kendisine gidiyor.

Öte yandan, X^+'nın en son elemanına, şekilde olduğu gibi, s dersek, $f(s)$, X'in en son elemanı olmalı, çünkü eğer $y \in X$ herhangi bir elemansa, belli bir $x \in X^+$ için, $y = f(x)$ olur ve $x \leq s$ olduğundan, $y = f(x) \leq f(s)$ olur.

Şimdi $f(s)$'nin f altında gittiği eleman olan $f(f(s))$'ye, yani $f^2(s)$'ye bakalım. Bu eleman $f(s)$'den hemen önceki eleman olmalı, çünkü $f(s)$, s'den hemen önceki elemandır. Aynı nedenden, $f^2(s)$, $f(s)$'den hemen önce gelen eleman olduğundan, $f^3(s)$, $f^2(s)$'den hemen önce gelen eleman olmalı.

Görüldüğü gibi sol tarafta özdeşlik fonksiyonu olan f, sağ tarafta elemanları bir eksiltiyor... Ortalarda bir yerde sorun çıkmalı... Bir yerde f elemanı kendisine mi götürmek, yoksa eksiltmek mi gerektiğine birtürlü karar verememeli...

Yukardaki parlak fikir ne yazık ki matematiksel olarak beş para etmez. "Ortalarda bir yer" diye bir yerden sözedilemez matematikte.

Söylediğimizi kanıtlayacağız ama tümevarım kullanarak kanıtlayacağız. Tümevarımla, her $x \in X$ için $f(x) = x$ eşitliğini kanıtlayacağız. Böylece s'ye gidecek yer kalmayacak ve bir çelişki elde edeceğiz.

$$A = \{x \in X : f(x) = x\}$$

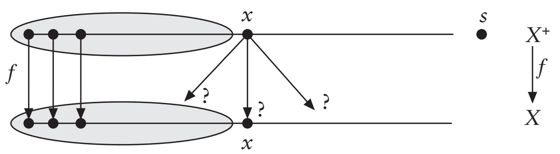
olsun. A'nın X'e eşit olduğunu kanıtlayacağız. Bunun için, X'ten herhangi bir x elemanı alıp,

$$\{y \in X : y < x\} \subseteq A$$

varsayımından yola çıkıp $x \in A$ ilişkisini kanıtlamalıyız.

Demek ki x'ten küçük her elemanın f altında kendisine gittiğini varsayıyoruz ve x'in de f altında kendisine gittiğini kanıtlayacağız.

$f(x)$ elemanına bakalım. Bu elemanın nerede olduğunu anlamaya çalışacağız.



$f(x)$, x'ten küçük olamaz. Aksi takdirde $f(x) \in A$, yani $f(f(x)) = f(x)$ olurdu ve f birebir olduğundan $f(x) = x$ olurdu, bir çelişki.

$f(x)$, x'ten büyük olamaz. Aksi takdirde X^+'nın hiçbir elemanı x'e değemezdi. Nitekim eğer $f(y) = x$ ise, $f(y) = x < f(x)$ ve $y < x$ olur. Ama o zaman da $y \in A$ içindeliği ve $x = f(y) = y < x$ eşitsizliği bize beklediğimiz çelişkiyi verir.

Demek ki $f(x) = x$.

Kanıtladığımızı yazalım.

Teorem 6.5. *Eğer X bir iyisıralamaysa, X ile X^+ iyisıralamalrı eşyapısal olamazlar.*